This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

32½.94

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5038.71

Bought with
the Gift of
Uriah A. Boyden,
of Boston.

24 April, 1873.

ÉTUDES ANALYTIQUES

SUR LA

THÉORIE DES PARALLÈLES.

ÉTUDES ANALYTIQUES

SUR LA

THÉORIE DES PARALLÈLES

PAR C. FLYE Ste-MARIE,

CAPITAINE D'ARTILLERIE, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1871.

Math 5038.71

1873, April 24.
Boyden Fund.

ÉTUDES ANALYTIQUES

SUR LA

THÉORIE DES PARALLÈLES

Introduction.

Après m'être livré, à plusieurs reprises, à d'infructueuses recherches sur la théorie des parallèles, j'ai fini par me poser la question suivante :

Est-il ou non possible de démontrer le postulatum d'Euclide, en s'appuyant uniquement sur les autres axiomes de la géométrie ?

Pour résoudre une telle question; j'ai d'abord cherché quelles relations existent entre les éléments des figures infinitésimales, et j'ai reconnu que la géométrie d'Euclide, lorsqu'on ne l'applique qu'à de telles figures, peut être établie sans le secours du postulatum.

M'aidant ensuite de quelques considérations géométriques, et passant de l'infiniment petit au fini d'après les règles du calcul intégral, je suis arrivé à poser les formules fondamentales d'une géométrie analytique indépendante de la théorie des parallèles. La géométrie imaginaire de Lobatschewsky n'est autre que celle qui résulterait de ces formules, si l'on supposait le postulatum inexact (1). Il est à remarquer qu'une telle géométrie est susceptible de recevoir la même extension que celle d'Euclide, sans que jamais ses résultats se contredisent ; il s'ensuit qu'elle ne peut pas fournir une démonstration du postulatum, car s'il en était ainsi, elle serait en contradiction avec son point de départ. Lobatschewsky en avait conclu que le raisonnement seul ne peut pas suffire à établir les bases de la théorie des parallèles, telles qu'elles nous sont connues ; toutefois, pour justifier entièrement cette assertion, il est nécessaire de faire voir qu'en se servant des seuls axiomes auxquels on a recours en dehors de cette théorie, on ne peut arriver qu'à des conclusions qui seront toujours comprises dans les formules adoptées comme fondements de la géométrie imaginaire.

(1) Lobatschewsky, dans ses *Etudes géométriques sur la théorie des parallèles*, et Bolyai, dans la *Science absolue de l'espace*, ont chacun établi directement, par des considérations géométriques, les principes de cette géométrie imaginaire, de laquelle ils ont tiré comme conséquence la géométrie des figures infinitésimales. Avant de connaître leurs travaux, j'ai été conduit aux mêmes résultats en suivant une marche inverse, que je n'ai pas cru, d'ailleurs, à propos de modifier.

Il me restait donc à examiner si les formules analytiques auxquelles j'étais arrivé vérifient tous ces axiomes. Cet examen devait, d'une manière ou de l'autre, fournir la réponse à la question que je m'étais posée. En effet, s'il s'était rencontré un axiome incompatible avec des formules établies dans l'hypothèse où le postulatum serait inexact, ce postulalum eût été par là même démontré ; au contraire, il est impossible d'admettre qu'il soit susceptible d'aucune démonstration, si tous les autres axiomes se trouvent vérifiés dans la géométrie imaginaire, de telle sorte qu'on n'en puisse rien tirer qui soit incompatible avec les bases de cette géométrie.

C'est à ce dernier résultat que je suis arrivé, résultat dont jusqu'ici l'exactitude avait pu être mise en doute, et que je crois avoir établi d'une manière complète, en suivant la marche que je viens d'indiquer.

La partie de ce travail qui traite des relations géométriques dans les figures infinitésimales en forme le premier chapitre.

Les chapitre II et III sont consacrés aux développements analytiques qui établissent la nécessité d'admettre un postulatum, dont le degré d'évidence n'est pas ici à discuter, mais que le raisonnement est impuissant à démontrer.

J'ai pensé qu'il pourrait être intéressant de faire connaître les formules qui, dans la géométrie imaginaire, remplaceraient les formules les plus usuelles de la géométrie vraie, et d'indiquer comment, appliquées à l'analyse, elles

peuvent fournir par des procédés simples des résultats certains, qui, souvent, ne s'établiraient directement qu'au moyen de calculs très-compliqués. Ces développements, que j'ai fait suivre d'une remarque appartenant à un autre ordre d'idées et tirée de l'insuffisance même des ressources que nous offre le raisonnement, forment le chapitre IV.

Enfin un chapitre complémentaire, que je termine en réfutant une démonstration récemment proposée par M. Carton, contient toutes les propositions auxquelles il y a eu lieu de recourir antérieurement, et que je n'ai pas cru devoir intercaler dans les chapitres précédents, afin de mieux faire ressortir la marche générale que j'ai suivie.

Pour une raison semblable, les calculs un peu longs ne sont qu'indiqués dans le cours de l'exposition; on en trouvera le développement à la suite du chapitre complémentaire; un renvoi permettra d'ailleurs de se reporter, chaque fois qu'il y aura lieu, soit à ce chapitre, soit au développement des calculs.

CHAPITRE PREMIER.

De quelques propriétés des figures infinitésimales.

Nota. Plusieurs des théorèmes qui suivent se démontrent sur des figures quelconques au moyen de la théorie des parallèles ; mais comme il ne doit être fait ici aucun usage de cette théorie, j'ai dû recourir à d'autres modes de démonstration, qui ne sont applicables qu'aux figures infiniment petites : on ne devra donc, dans la suite, considérer ces théorèmes comme démontrés que pour de telles figures.

Je renvoie au chapitre complémentaire (nos II à IX) pour la démonstration de l'existence du plan, la détermination de la longueur d'un arc de courbe quelconque, et quelques propriétés générales de la tangente.

---

1. La somme des trois angles d'un triangle infinitésimal abc est, à la limite, égale à deux angles droits.

Je supposerai pour plus de simplicité l'angle a constant en grandeur et de position invariable. Soit BC la direction limite du côté bc (fig. 1, pl. I). Je prolonge les côtés ba et ca suivant ab' et ac'; les angles b et c ont pour limites les angles C ab' et B ac'. Si j'y ajoute l'angle $b'ac'$ égal à l'angle a du triangle, auquel il est opposé par le sommet, j'obtiens trois angles dont la somme vaut deux angles droits, et qui ne sont autres que les

limites des trois angles du triangle ; ce qui démontre la proposition énoncée.

La même forme de raisonnement s'appliquerait au cas où l'angle a varierait en grandeur ou en position.

Corollaire : si deux angles d'un triangle sont finis, leurs suppléments le sont aussi.

2. Lemme I. Soit A l'angle compris entre les côtés A B et A C d'un triangle quelconque A B C, et n un nombre entier, tel que n A soit au moins égal à deux angles droits, le rapport de l'un quelconque des côtés A B ou A C au troisième B C est moindre que n.

Pour le démontrer, je rabats le triangle A B C (fig. 2, pl. I) sur son plan en A B′ C, en le faisant tourner autour de A C comme charnière. Je rabats de même A B′ C en A B′ C′, en le faisant tourner autour de A B′, et je répète cette construction jusqu'à ce que j'aie formé, autour du point A, n triangles adjacents égaux entre eux ; n A étant au moins égal à deux angles droits, le contour polygonal formé par les côtés B C, C B′..., dont le périmètre est B C $\times$ n, aboutira au prolongement de A B, ou coupera ce prolongement en un point D. La droite D B, et à plus forte raison la droite A B qui n'en est qu'une partie, est plus petite que le contour polygonal limité au point D, et par suite plus petite que BC $\times$ n. Donc le rapport $\frac{AB}{BC}$ est plus petit que n.

On démontrerait de la même manière l'inégalité $\frac{AC}{BC} < n$.

3. Lemme II. Le rapport d'une circonférence infiniment petite à son rayon est fini.

Pour le démontrer, à l'extrémité d'un rayon O A de la circonférence infinitésimale (fig. 3. pl. I), je mène la tangente A B égale à ce rayon, et je joins l'extrémité B de la tangente au centre O. Le triangle infinitésimal O A B est rectangle et isoscèle. D'après la proposition du n° 1, l'angle en O sera à la limite égal à la moitié d'un angle droit, et l'arc A C, qu'il intercepte entre

ses côtés, égal au huitième de la circonférence. Cet arc est moindre que la tangente A B (chap. comp. n° VII), ou que le rayon O A. Donc la circonférence infinitésimale est moindre que 8 fois le rayon. D'autre part, la demi-circonférence est plus grande que le diamètre, et par suite la circonférence entière est plus grande que le double de ce diamètre, ou que 4 fois le rayon. Le rapport de la circonférence infiniment petite à son rayon est donc compris entre 4 et 8 ; donc ce rapport est fini.

4. Si dans un triangle infinitésimal les trois angles sont finis, le rapport de deux côtés quelconques est fini.

Ce théorème résulte immédiatement du lemme I.

5. Si, dans un triangle infinitésimal A B C, deux angles A et B sont finis, et le troisième C infiniment petit, le rapport du côté A B à chacun des deux autres est infiniment petit.

Soit B C le plus petit des deux côtés comprenant l'angle infiniment petit (fig. 4, pl. I). J'imagine décrit du point C comme centre avec le rayon C B un arc B D de circonférence compris entre les côtés de cet angle. La circonférence entière a un rapport fini avec son rayon C B, et l'arc B D est une fraction infiniment petite de cette circonférence. Donc le rapport $\frac{\text{arc B D}}{\text{C B}}$, et à plus forte raison le rapport $\frac{\text{corde B D}}{\text{C B}}$, est infiniment petit.

D'un autre côté, l'angle A étant fini, le rapport $\frac{\text{A B}}{\text{B D}}$ ne peut être infini (Lemme I). Le rapport $\frac{\text{A B}}{\text{C B}}$, égal à $\frac{\text{A B}}{\text{B D}} \cdot \frac{\text{B D}}{\text{C B}}$, est donc le produit de deux facteurs dont l'un est infiniment petit, et dont l'autre ne peut être infini ; donc ce rapport, et à plus forte raison aussi le rapport $\frac{\text{A B}}{\text{A C}}$, est infiniment petit.

Corollaire I. — Un côté d'un triangle étant plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence, le rapport entre les côtés comprenant l'angle infiniment petit, a pour limite l'unité.

Corollaire II. — Si dans un triangle infinitésimal ABC, l'angle A étant fini et ayant un supplément fini est compris entre deux côtés AB et AC du même ordre de grandeur, les deux autres angles B et C sont finis.

En effet, 1° si les angles B et C étaient infiniment petits tous deux, le supplément de l'angle A, qui à la limite est égal à la somme B + C (n° 1), serait infiniment petit ; 2° si l'angle C, par exemple, était seul infiniment petit, le rapport $\frac{AB}{AC}$ le serait aussi. Dans les deux hypothèses, la conséquence serait contraire aux conditions de l'énoncé : donc les deux angles B et C sont finis.

6. Réciproquement, si dans un triangle infinitésimal ABC le rapport d'un côté AB à l'un des deux autres, AC par exemple, est infiniment petit, l'angle C opposé à AB l'est aussi.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait prendre un nombre entier n assez grand pour que nC soit au moins égal à deux angles droits. On aurait alors, d'après le lemme I (n° 2), l'inégalité $\frac{AC}{AB} < n$, d'où $\frac{AB}{AC} > \frac{1}{n}$, et par suite ce dernier rapport ne serait pas infiniment petit, comme l'énoncé le suppose.

7. Si dans un triangle infinitésimal rectangle les deux angles aigus sont finis, le rapport de l'hypoténuse à l'un quelconque des côtés de l'angle droit surpasse l'unité d'une quantité finie.

Soit le triangle infinitésimal ABC, rectangle en A (fig. 5, pl. 1). A partir du point C je prends sur l'hypoténuse une longueur CD égale à AC. Le triangle ADC étant isoscèle, les angles DAC et ADC sont égaux ; et j'ai, à la limite, la relation : angle DAC + angle ADC = 2^{dr} — C. Les deux angles dont la somme forme le premier membre étant égaux, on a, en divisant les deux membres par 2 :

Angle DAC = $1^{dr} - \frac{C}{2}$, ou 1^{dr} — angle DAC = $\frac{C}{2}$, ou enfin angle BAD = $\frac{C}{2}$. On en déduit que les trois angles du triangle

BAD sont finis ; d'où il résulte que BD est du même ordre de grandeur que AB, et, par conséquent, aussi que AC. Donc la limite du rapport $\frac{BD}{AC}$ ou $\frac{BC - AC}{AC}$ est finie.

Un raisonnement semblable prouverait qu'il en est de même du rapport $\frac{BC - AB}{AB}$. De là résulte la proposition énoncée.

8. Dans tout triangle infinitésimal dont les trois angles sont finis, le rapport d'un côté à la somme des deux autres diffère de l'unité d'une quantité finie.

Il suffit, pour ramener cette proposition à la précédente, de projeter orthogonalement les deux derniers côtés sur le premier.

9. Lorsqu'il y a lieu d'établir une comparaison entre les éléments (angles ou côtés) de deux triangles, les éléments à comparer seront dits homologues, *quel que soit d'ailleurs le résultat de la comparaison*. Toutefois, l'emploi de cette expression supposera toujours que les côtés homologues sont adjacents aux angles homologues.

10. Si dans deux triangles infinitésimaux ABC, A'B'C' (fig. 6, pl. I), dont tous les angles sont finis, deux côtés homologues AB et A'B' ont entre eux un rapport tendant vers un, et sont adjacents à des angles homologues dont les limites sont les mêmes, le rapport de deux éléments homologues quelconques a pour limite l'unité.

Je prends à partir du point A sur le côté AB, prolongé s'il est nécessaire, une longueur AD égale à A'B', et sur AD, du même côté que le triangle ABC, je construis le triangle ADE égal à A'B'C'.

D'après le théorème énoncé au n° 4, les trois côtés des deux triangles sont, dans l'hypothèse actuelle, des infiniment petits du même ordre, soit du premier ordre.

Je mène la droite EB, et je dis que les éléments du triangle AED ne seront altérés que d'une fraction infiniment petite d'eux-mêmes, si je leur substitue ceux du triangle AEB. En

effet, DB étant la différence entre deux infiniment petits du premier ordre dont le rapport tend vers un par hypothèse, est au moins du second ordre; d'où il suit que l'angle E du triangle DEB est infiniment petit (n° 6). On a donc, en appliquant au triangle EDB les théorèmes énoncés aux n°s 1 et 5: 1° lim. angle AED = lim. angle AEB; 2° lim. angle EDA = lim. angle EBA; 3° lim. $\frac{ED}{EB} = 1$.

Je prolonge AE jusqu'à sa rencontre en F avec CB, et je dis que les éléments du triangle AEB ne seront altérés que d'une fraction infiniment petite d'eux-mêmes, si je leur substitue ceux du triangle AFB. En effet, l'angle FBA par hypothèse, et l'angle EBA d'après une des conclusions du paragraphe précédent, ont même limite que l'angle EDA; leur différence FBE est, par conséquent, infiniment petite, et le côté EF du triangle EFB est un infiniment petit du second ordre au moins, les deux autres étant du premier. Donc, 1° lim. $\frac{AE}{AF} = 1$; 2° lim. $\frac{EB}{FB} = 1$, et 3° lim. angle AEB = lim. angle AFB.

On démontrera de même que l'angle EAD ayant par hypothèse même limite que l'angle CAD, les éléments du triangle AFB ne seront altérés que d'une fraction infiniment petite d'eux-mêmes, si on leur substitue ceux du triangle ACB.

Donc les éléments du triangle ADE, ou de son égal A'B'C' ne seront altérés que d'une fraction infiniment petite d'eux-mêmes, si on leur substitue successivement ceux des triangles ABE, ABF, et finalement ABC. Donc enfin, dans les deux triangles ABC et A'B'C' le rapport de deux éléments homologues quelconques a pour limite l'unité.

11. Dans deux triangles infinitésimaux ABC, A'B'C', dont tous les angles sont finis, si deux angles homologues A et A' tendent vers une même limite, et sont compris entre côtés homologues dont les rapports $\frac{AB}{A'B'}$ et $\frac{AC}{A'C'}$ tendent vers un, le rapport entre deux éléments homologues quelconques a pour limite l'unité.

Ce théorème se démontre sans aucune difficulté par des raisonnements semblables à ceux du numéro précédent, et sur la même figure, en comparant successivement le triangle ACB aux triangles AFB, AEB et finalement AED ou A'B'C'.

12. Si dans deux triangles infinitésimaux ABC, A'B'C' dont tous les angles sont finis, les angles homologues ont les mêmes limites, à savoir A même limite que A', B que B', C que C', les rapports $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{AC}{A'C'}$, $\frac{BC}{B'C'}$, des côtés homologues ne peuvent différer entre eux que d'une fraction infiniment petite d'eux-mêmes.

Je supposerai ici que ces rapports restent finis, et j'ajoute, pour prévenir toute objection tendant à contester la généralité d'une démonstration ainsi restreinte, que le théorème ne sera appliqué que dans le cas où cette condition se trouvera remplie. Il pourra d'ailleurs être démontré directement d'une manière générale, au moyen des formules analytiques qui seront établies dans le chapitre II.

Je considère d'abord le cas où les côtés des deux triangles décroissent suivant une telle loi qu'une commune mesure soit toujours contenue m fois dans AB et n fois dans A'B', les nombres entiers m et n étant constants ou du moins restant finis. Je divise AB en m parties égales à la commune mesure (fig. 7, pl. I); par chaque point de division je mène des droites formant avec la portion de la ligne BA dirigée du côté du sommet A des angles égaux à B. Soient pr et qs deux de ces lignes menées par les deux points de division consécutifs p et q, et limitées au côté AC. Sur la division pq je construis le triangle pql ayant l'angle en p égal à A, et l'angle en q déjà construit égal à B. Répétant la même construction sur chacune des divisions du côté BA, j'obtiens des triangles tous égaux au triangle pql, ou au triangle Aah qui a la première division pour base, comme ayant côté égal adjacent à angles égaux chacun à chacun.

Les triangles Apr, Aqs et pql ont chacun un angle égal à A et un angle égal à B. Donc dans chacun, le troisième angle a

même limite que C. De là les égalités suivantes entre les limites d'angles :

$$\lim. plq = \lim. \mathrm{A}sq = \lim. \mathrm{A}rp \qquad (1)$$

et par suite :

$$\lim. prs = \lim. pls, \qquad (2)$$

comme suppléments d'angles égaux.

L'angle rpl étant supplémentaire de la somme $\mathrm{A}pr + qpl$, ou $\mathrm{A} + \mathrm{B}$, on a aussi :

$$\lim. rpl = \lim. \mathrm{C}. \qquad (3)$$

Je mène la droite lr. Dans le triangle rls, l'angle en r a pour supplément à la limite, la somme $rls + \mathrm{A}sq$, ou, d'après les égalités (1), $rls + plq$; d'où l'on tire :

$$\lim. lrs = \lim. plr \qquad (4)$$

Si l'on retranche membre à membre l'égalité (4) de l'égalité (2), il vient : $\lim. prl = \lim. rls$. De l'égalité (3) on déduit que l'angle rpl est fini, ainsi que son supplément ; les côtés pr et pl, comprenant cet angle, étant dans un rapport fini, l'un avec $\mathrm{A}p$, l'autre avec pq, qui est une fraction finie de $\mathrm{A}p$, sont du même ordre de grandeur ; donc les trois angles du triangle plr sont finis (n° 5, cor. II), et le théorème du n° 10 peut être appliqué aux triangles plr et slr, qui ont le côté lr commun adjacent à des angles homologues dont les limites sont égales. On en tire : $\lim. \frac{rs}{pl} = 1$: d'où $\lim. \frac{rs}{pq} = \lim. \frac{pl}{pq} = \lim. \frac{\mathrm{A}h}{\mathrm{A}a}$, rapport indépendant du rang que la division pq peut occuper parmi toutes celles dont se compose AB. On en déduit aisément que la ligne pr, ainsi que chacune des lignes menées de la même manière par les autres points de division du côté AB, partage à la limite les deux côtés de l'angle A en parties proportionnelles. Si à partir du point A je prends sur AB n divisions, la longueur AD obtenue sera égale au côté A′B′ du second triangle. Soit DE la ligne menée par le point D faisant l'angle ADE égal à B. On aura, d'après ce qui précède, $\lim. \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \lim. \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}}$; dans les conditions de l'énoncé, et d'après le théorème du n° 10 appliqué aux triangles ADE et A′B′C′, l'égalité subsiste

si je remplace A E par A' C'; je remplace en même temps A D par son égale A' B', et il vient enfin:

$$\lim. \frac{AB}{A'B'} = \lim. \frac{AC}{A'C'}.$$

On aurait de même $\lim. \frac{BC}{B'C'} = \lim. \frac{AB}{A'B'}$.

Considérons maintenant le cas où les côtés A B et A' B' ne conservent pas une commune mesure contenue un nombre de fois fini dans chacun d'eux.

Sur le côté A B (fig. 8. pl. I.), je prends, à partir du point A, la longueur A D, égale à A' B', et je mène la droite D E faisant avec D A un angle égal à B. Je dis qu'on a à la limite $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

Supposons en effet qu'il en soit autrement, et soit $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC}$, la différence entre A D et A F ou D F étant une fraction finie de A B. Je pourrai diviser A B en un nombre fini de parties égales telles qu'un des points de division G tombe entre D et F, et que le rapport $\frac{GF}{AF}$ soit fini (il suffit par exemple, pour cela, A F étant de même ordre que D F, que les divisions soient plus petites que $\frac{DF}{2}$, ou plus généralement que $DF \times (1 - \alpha)$, α étant fini). Je mène G H faisant avec G A un angle égal à B. On devrait avoir, d'après ce qui précède, $\lim. \frac{AG}{AB} = \lim. \frac{AH}{AC}$, égalité incompatible avec l'égalité supposée $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC}$; donc on doit avoir nécessairement $\lim. \frac{AD}{AB} = \lim. \frac{AE}{AC}$, ou, en renversant les rapports, $\lim. \frac{AB}{AD} = \lim. \frac{AC}{AE}$; d'où se déduit, comme dans le premier cas considéré, l'égalité $\lim. \frac{AB}{A'B'} = \lim. \frac{AC}{A'C'}$, c'est-à-dire la proportionnalité des côtés homologues dans les deux triangles A B C, A' B' C', quand ces côtés

deviennent infiniment petits; ce qui démontre la proposition énoncée.

13. Si dans le triangle infinitésimal ABC l'angle A a pour limite un angle droit, le carré du côté opposé BC est égal, sauf une fraction infiniment petite de lui-même, à la somme des carrés des deux autres côtés AB et AC, c'est-à-dire que le rapport $\frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$ a pour limite l'unité.

Je suppose d'abord les trois angles A, B, C finis; les rapports $\frac{AB}{BC}$ et $\frac{AC}{BC}$ seront finis. Si du sommet A (fig. 9, pl. I) j'abaisse la perpendiculaire AD sur le côté opposé BC, les deux triangles ABD et ABC, qui ont l'angle B commun et à la limite un angle droit égal, sont à la limite équiangles. D'ailleurs leurs trois angles sont finis ainsi que le rapport $\frac{AB}{BC}$ de deux côtés homologues. On a donc lim. $\frac{AB}{BC}$ = lim. $\frac{BD}{AB}$ (n° 12). Multipliant les deux membres de cette égalité par $\frac{AB}{BC}$, on obtient la suivante: lim. $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}$ = lim. $\frac{BD}{BC}$.

La comparaison des deux triangles ADC et ABC donnera de même lim. $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$ = lim. $\frac{CD}{BC}$.

Additionnant membre à membre ces deux dernières égalités, on obtient enfin la suivante :

$$\lim. \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{BD + CD}{BC} = 1.$$

Si l'un des angles aigus, B par exemple, est infiniment petit, AC sera une fraction infiniment petite de BC, le rapport $\frac{AB}{BC}$ tendra vers l'unité, et l'égalité lim. $\frac{\overline{AB} + \overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = 1$, se trouvera encore vérifiée.

14. Le rapport de l'arc infiniment petit à sa corde a pour limite l'unité, à condition toutefois qu'au point où viennent se confondre les deux extrémités de l'arc, la tangente à la courbe soit unique.

En effet soit MN (fig. 10, pl. II) un arc infiniment petit sur une courbe quelconque; sa longueur se déterminerait en inscrivant dans cet arc des contours polygonaux dont le périmètre aurait cette longueur pour limite (ch. compl. n° VI). Soit ab un côté d'un de ces contours polygonaux. Par les points M et a je mène la droite MV. Les arcs Ma et ab étant infiniment petits, leurs cordes feront des angles infiniment petits avec la tangente menée par leur extrémité commune a (ch. comp. n° IX). Donc aussi l'angle Vab qu'elles font entre elles est infiniment petit.

Du point M comme centre je décris des circonférences passant par les points a et b, coupant la corde MN aux points h et k, et la droit M V aux points a et l (si la courbe n'est pas plane, les circonférences seront remplacées par des sphères). Je remarque d'abord qu'une même circonférence ne peut couper l'arc M N infiniment petit qu'en un point; car a étant, par exemple, la première intersection de l'arc MN avec la circonférencc de rayon Ma, si l'on supposait qu'un second point s de cette circonférence pût appartenir à l'arc a N, d'après le raisonnement précédent, l'angle Vas devrait être infiniment petit, ce qui est absurde, cet angle étant nécessairement plus grand qu'un angle droit. Or, l'angle Vab étant infiniment petit, et les deux autres angles du triangle bal étant finis, comme on le reconnaît sans peine, le rapport $\frac{ab}{al}$ ou $\frac{ab}{hk}$ diffère infiniment peu de l'unité.

Si l'on répète le même raisonnement sur chacun des côtés, tels que ab, d'un contour polygonal quelconque inscrit dans l'arc MN, on arrive à cette conclusion que le rapport du périmètre à la corde MN ne diffère de l'unité que d'un infiniment petit; donc aussi l'unité est la limite vers laquelle tend le rapport de l'arc infiniment petit à sa corde.

CHAPITRE II.

Choix d'un système de coordonnées dans un plan. — Forme que prend l'équation générale de la droite dans ce système, et indépendamment de la théorie des parallèles. — Expression analytique de la distance de deux points. — Formules de transformation de coordonnées. — Première conclusion relative aux résultats que peut fournir une forme quelconque de raisonnement appliquée à une figure plane et s'appuyant uniquement sur les propriétés dont les éléments de la figure jouissent dans le plan.

De l'arc de rayon infini.

15. Soit AX une droite indéfinie issue du point A (fig. 11, pl. II), et O un point quelconque sur cette droite. Par le point A je fais passer une circonférence ayant son centre en O, et par suite OA pour rayon. Cette circonférence a pour tangente en A la droite PQ perpendiculaire à AX, et, si son rayon est suffisamment grand, elle coupera en un point M l'arc KH décrit du point A comme centre avec un rayon AH donné quelconque, et compris dans l'angle QAX. Il suffit pour cela que l'inégalité $2\,AO > AK$ soit satisfaite, car dans le voisinage des deux extrémités de son diamètre, la demi-circonférence O, comprise dans l'angle QAX aura alors des points à l'intérieur et à l'extérieur du secteur AHK, et elle devra nécessairement couper l'arc KH.

Plus le rayon O A, dont l'extrémité A est fixe, sera grand, plus l'insersection M se rapprochera de l'extrémité H de l'arc invariable H K; car si l'on construit ainsi deux circonférences tangentes l'une à l'autre en A, celle qui aura le plus grand rayon enveloppera l'autre. Si donc le point O s'éloigne indéfiniment sur A X, l'arc H M, constamment décroissant, aura une limite unique Hm finie ou nulle. Si cette limite est nulle, le point m se confond avec H; c'est effectivement ce qui a lieu, mais ce n'est qu'avec le secours de la théorie des parallèles qu'on sait le démontrer; je m'abstiens donc actuellement de rien préciser à cet égard. Tout autre arc de cercle K' H' concentrique à K H contiendra de même un point m', dont s'approche indéfiniment la circonférence O, lorsque son centre s'éloigne du point A au delà de toute limite. La ligne A V, qui contient tous les points tels que m, m', qu'on peut ainsi obtenir en faisant varier le rayon A H, jouit de la propriété suivante : si dans l'intérieur de l'angle Q A X on prend à partir du point A, sur la circonférence O, un arc d'une longueur finie quelconque, tous les points de cet arc s'approchent indéfiniment de A V, lorsque le centre O s'éloigne indéfiniment sur A X.

Une branche A U, symétrique de A V, jouit de la même propriété dans l'intérieur de l'angle P A X.

La ligne indéfinie U V sera dite *l'arc de rayon infini* dérivé de la circonférence passant par le point A et dont le centre s'éloigne indéfiniment sur A X.

L'expression d'arc est employée ici dans un sens général qui n'implique pas nécessairement l'idée de courbure, rien dans tout ce qui précède n'ayant été établi qui indique si la ligne U V est courbe, ou si elle se confond avec la droite P Q. Quoi qu'il doive en être, tout point situé par rapport à U V du même côté que le centre O de la circonférence dont cet arc dérive, sera dit situé du côté de la concavité de l'arc; tout point situé du côté opposé sera dit situé du côté de la convexité.

Il est clair que deux arcs de rayon infini sont superposables.

Si l'on suppose que l'arc U V puisse être curviligne, de toutes les droites qu'on peut mener par le point A, la droite P Q est la

seule qui, prolongée dans les deux sens, le laisse entièrement d'un même côté : c'est la *tangente* à l'arc au point A, et la droite A X est la *normale*.

16. Soit U V (fig. 12, pl. II) l'arc de rayon infini dérivé d'une circonférence passant par le point A, et dont le centre s'éloigne indéfiniment sur la droite A X. Soit A T la tangente au point A, et P un point de l'arc. De ce point j'abaisse sur A T une perpendiculaire que je prolonge du côté de la concavité suivant P S. On sait que les droites A X et P S perpendiculaires toutes deux sur A T ne peuvent se rencontrer. Si je joins le point P à un point O quelconque pris sur A X, l'angle O P S diminuera d'une manière continue, et tendra vers une certaine limite α nulle ou finie, lorsque le point O s'éloignera indéfiniment du point A. Si je construis l'angle S P R égal à α (α pouvant être nul), toute droite issue du point P et comprise dans l'angle R P A rencontrera la droite A X suffisamment prolongée, tandis que la droite P R ne la rencontre pas, si loin qu'on la prolonge.

17. Cette droite jouit de quelques propriétés que j'aurai à invoquer ; et pour permettre de passer outre plus facilement à ceux qui admettront de suite que ces propriétés sont indépendantes de la théorie des parallèles, les démonstrations en seront indiquées en petits caractères. Lorsque la même disposition se reproduira dans la suite, elle sera motivée par les mêmes considérations.

1° Si sur la droite P R (fig. 12, pl. II) ou sur son prolongement au delà du point P, on prend un point Q fixe quelconque, et qu'on le joigne à un point O qui se déplace sur la droite A X, l'angle O Q R tendra vers zéro quand le point O s'éloignera indéfiniment du point A.

En effet, soit une droite Q L quelconque faisant avec Q R, au point Q, et dans l'intérieur de l'angle A Q R, un angle aussi petit qu'on voudra ; soit un point C situé dans l'intérieur de l'angle L Q R. La droite P C, suffisamment prolongée, rencontrera la droite A X (n° 16) ; Q L la rencontrera à plus forte raison ; donc on peut prendre sur A X

un point assez éloigné pour que la droite qui joint ce point au point Q fasse avec Q R un angle aussi petit qu'on voudra.

2° Le point O sur la droite A X peut être pris assez éloigné du du point A, pour que la circonférence décrite de ce point comme centre avec O A pour rayon coupe la droite P R.

Soit, en effet, A H (fig. 13, pl. II) la perpendiculaire abaissée du point A sur P R, et soit M un point quelconque situé sur H R ; l'angle A M R est obtus, et si au point M j'élève une perpendiculaire sur A M, d'après le théorème précédent, elle rencontrera A X en un point O. Dans le triangle rectangle M O A, l'hypoténuse O A est plus grande que le côté O M. D'autre part, d'après la manière dont l'arc U V est déterminé, le point P est extérieur à la circonférence décrite du point O comme centre avec O A pour rayon ; le point M lui est intérieur ; donc cette circonférence coupe P R quelque part en un point I situé entre P et M.

Remarquons que l'angle O M R étant aigu, la circonférence ne peut avoir entre P et M qu'un point commun avec P R ; il en sera encore de même, si, M restant fixe, je suppose que le centre s'éloigne du point A.

Le point I, situé sur une circonférence dont tous les points tendent vers l'arc U V, s'approche donc indéfiniment du seul point P qui soit situé à la fois sur cet arc et sur la portion de droite P M à laquelle I appartient.

3° Soit I l'intersection de la circonférence O avec P R (fig. 14, pl. II) ; l'angle O I R décroît au delà de toute limite, lorsque le centre s'éloigne indéfiniment sur A X, et que le sommet I s'approche indéfiniment du point P.

En effet, après avoir construit l'angle O I R déterminé par une des circonférences qui coupent P R, je peux prendre sur A X un second point O′ plus éloigné de A que le point O, et en même temps assez éloigné pour que l'angle O′ I R soit aussi petit qu'on voudra. La circonférence O′, à laquelle le point I précédemment déterminé est intérieur, coupera P R en un point I′ ; l'oblique O′ I′ plus grande que l'oblique O′ I s'écarte davantage du pied de la perpendiculaire abaissée de O′ sur P R ; l'angle aigu O′ I R est donc extérieur au triangle O′ I I′ ; la somme des trois angles de ce triangle ne pouvant excéder deux

angles droits (ch. compl. n° III), l'angle O′ I′ R est plus petit que O′ I R, et par conséquent peut devenir plus petit que tout angle donné.

4° L'arc U V, déterminé comme il a été exposé plus haut, se confond sur une étendue finie quelconque avec l'arc dérivé d'une circonférence passant par le point P et dont le centre s'éloignerait indéfiniment sur la droite P R.

Sur U V je prends à partir du point P (fig. 15, pl. II) un arc P N quelconque dont je mène la corde. Je construis la circonférence O avec un rayon O A plus grand que la moitié de la corde P N et assez grand pour qu'elle coupe P R en un point I ; je prends sur cette circonférence, à partir du point I, un arc I K sous-tendu par une corde égale à la corde P N, et à partir du point A, je prends l'arc A L égal à I K. Les cordes A L et P N, égales toutes deux à la corde I K, sont égales entre elles.

Sans faire varier la longueur P N, je suppose que le centre O s'éloigne indéfiniment du point A ; les angles O A L et O I K seront constamment égaux, et par conséquent leurs limites sont égales. Or, d'un même côté de la droite O I le point K est le seul sur la circonférence O dont la distance au point I soit égale à P N (les premiers théorèmes du deuxième livre de Legendre ne reposent en rien sur la théorie des parallèles) ; donc, quand le point I s'approche indéfiniment du point P, et qu'en général tous les points de la circonférence tendent vers l'arc U V, le point K s'approche indéfiniment de N ; l'angle O I R décroît d'ailleurs au delà de toute limite ; on en déduit que l'angle R I K a pour limite R P N.

D'un autre côté, le point L s'approche indéfiniment d'un certain point M de l'arc U V, et l'angle O A L a pour limite O A M. Les angles O A M et R P N, limites de deux angles constamment égaux, sont donc égaux entre eux. Observant, en outre, que la corde A M ne peut différer de A L, ni par suite de P N, on conclut que, si l'on déplace la figure R P V en faisant coïncider P R avec A X, le point N tombera en M ; autrement dit, dans cette nouvelle position, l'arc P V, dont le point N est un point quelconque, s'appliquera exactement sur l'arc A V, ce qui démontre la proposition énoncée.

Il en résulte les corollaires suivants :

Corollaire I. La droite P R est la normale à l'arc U V, élevée au point P.

Corollaire II. Par un point quelconque S du plan on peut mener une normale à l'arc UV, et l'on n'en peut mener qu'une seule.

En effet, joignons le point S à un point O quelconque, pris sur la droite A X (fig. 16, pl. II) ; la circonférence décrite du point O comme centre avec O A pour rayon coupe O S en un certain point M ; quand le centre O s'éloigne du point A, la droite S O tend vers une position déterminée S R; le point M constamment situé sur S O, et à une distance finie de S moindre que S A, s'approche donc indéfiniment de la droite S R ; d'ailleurs il s'approche indéfiniment aussi de l'arc UV ; cet arc et la droite S R doivent donc avoir un point commun P. Un raisonnement identique à celui par lequel le premier théorème de ce numéro a été établi, démontre, à l'aide du corollaire précédent, que S R est normale à l'arc au point P, et qu'aucune autre droite issue du point S ne peut être normale.

18. Si deux arcs de rayon infini dérivent de circonférences concentriques dont le centre s'éloigne indéfiniment sur une normale commune, toute droite normale à l'un sera normale à l'autre.

En effet, la normale à l'un des arcs menée par un point quelconque de l'espace se déterminera absolument de la même manière que la normale à l'autre menée par le même point (n° 17, corollaire II).

Deux tels arcs seront dits *parallèles*.

Un arc de rayon infini étant donné, on sait qu'on peut lui mener une normale par un point quelconque de son plan, et qu'on n'en peut mener qu'une ; on pourra de même, par tout point du plan, lui mener un arc parallèle, et, par un même point, on n'en pourra mener qu'un seul.

19. Deux arcs parallèles de rayon infini interceptent sur leurs normales communes des longueurs égales.

Soient, en effet, AB et A′ B′ (fig. 17, pl. II) deux normales comprises entre les arcs parallèles A A′ et B B′. Je prolonge ces normales du côté de la concavité. Soit AX le prolongement de BA ; les deux arcs peuvent être considérés comme dérivés de circonférences dont le centre s'éloigne indéfiniment sur la droite A X. D'un point O pris sur cette droite, comme centre, avec les rayons O A et O B, je décris deux circonférences

dont la première coupe le prolongement de B′ A′ en un point a ; le rayon O a prolongé coupe la seconde en b, et l'on a $a\,b = \mathrm{A\,B}$. Or le point a s'approche indéfiniment de A′ ; le point b, qui tend à la fois vers la droite A′ B′ et vers l'arc B B′, s'approche indéfiniment de leur point commun B′ ; il s'ensuit que $a\,b$, et par conséquent aussi son égale A B, ne peut différer de A′ B′, c'est-à-dire que les arcs interceptent sur les deux normales communes des longueurs égales.

La longueur constante de la normale commune mesure la distance des arcs parallèles.

L'arc de rayon infini étant partout identique à lui-même, il résulte du théorème précédent que si l'on double l'arc A A′, l'arc BB′ sera doublé, et qu'en général le rapport de deux arcs parallèles compris entre normales communes est constant, quel que soit l'écartement de ces normales : il ne dépend que de la distance des arcs.

Le calcul suivant a pour objet de déterminer la valeur de ce rapport en fonction de la longueur A B, seule quantité dont il puisse dépendre.

20. *Rapport de deux arcs parallèles de rayon infini compris entre deux normales communes.*

Soient A C et BD deux arcs parallèles de rayon infini (fig. 18, pl. III) compris entre les normales A B et CD ; je désigne la distance A B des deux arcs par z, et le rapport $\frac{\mathrm{B\,D}}{\mathrm{A\,C}}$ par $f(z)$; je me propose de trouver la forme de la fonction f. Pour cela, entre les deux normales prolongées au delà des points B et D, c'est-à-dire du côté de la convexité, je mène l'arc B′D′ parallèle à BD, et distant de cet arc d'une longueur BB′ que je désigne par h. Tous les arcs de rayon infini étant identiques, et la fonction f dépendant uniquement de la distance des arcs parallèles, et non de l'écartement des normales, on a :

$$\frac{\mathrm{B'\,D'}}{\mathrm{B\,D}} = f(h) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{B'\,D'}}{\mathrm{A\,C}} = f(z+h).$$

On en tire : $\dfrac{f(z+h)}{f(h)} = \dfrac{\mathrm{B\,D}}{\mathrm{A\,C}} = f(z).$

Multipliant les deux membres extrêmes par $f(h)$, et retranchant des deux produits égaux la même quantité $f(z)$, on obtient l'égalité :

$$f(z+h) - f(z) = f(z)\,[f(h) - 1]\,;$$

d'où l'on tire, en divisant les deux membres par h :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f(z)\,\frac{f(h) - 1}{h}.$$

Si l'on fait tendre h vers zéro, le premier membre a pour limite la dérivée $f'(z)$ de la fonction f; et, comme pour z égal à zéro la fonction f est égale à 1, le second membre peut s'écrire $f(z)\,\frac{f(h) - f(0)}{h}$ et a pour limite $f(z)\,f'(0)$. D'où l'égalité :

$$f'(z) = f(z)\,f'(0).$$

Soit $f'(0) = \frac{1}{k}$, k étant une constante; la relation précédente peut s'écrire $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{k}$, équation différentielle de laquelle on tire par intégration, et en remarquant que $l.\,f(z)$ s'annule avec z :

$$l.\,f(z) = \frac{z}{k}, \quad \text{ou} \quad f(z) = e^{\frac{z}{k}} \qquad (a)$$

21. Dans cette dernière formule, k représente un certain paramètre linéaire déterminé, mais dont la valeur nous reste inconnue. J'ai supposé l'arc BD du côté de la convexité de l'arc AC. Il en résulte que le rapport $\frac{BD}{AC}$ ne peut être plus petit que un; d'ailleurs, ce rapport est fini tant que z reste fini; donc, d'après la formule (a) elle-même, le paramètre k ne peut être nul, et doit être nécessairement ou bien fini et positif, ou bien infini. Supposer k fini, c'est admettre que des relations géométriques générales peuvent dépendre d'une certaine longueur absolue, laquelle disparaît dans l'hypothèse contraire. Chacun a la certitude qu'un tel paramètre ne peut

exister, et que par suite k est infini (1). Mais ce que je veux prouver, c'est que cette certitude ne peut pas se baser sur le raisonnement.

22. *Détermination de la position d'un point dans le plan, au moyen de deux coordonnées.*

Pour qu'on puisse appliquer l'analyse à la géométrie, il est essentiel que la position d'un point quelconque se détermine au moyen d'éléments susceptibles de mesure, qu'on appelle les coordonnées du point. La simplicité de la formule (a) m'a conduit à choisir pour système de comparaison dans un plan un arc de rayon infini, tel que $u\,v$ (fig. 20, pl. III), mené par un point O pris arbitrairement dans le plan. La position d'un point M du plan sera déterminée lorsqu'on connaîtra la longueur de la normale MP abaissée du point M sur uv, la distance OP, comptée suivant l'arc, du point O au pied de la normale, et le sens dans lequel chacune de ces deux longueurs doit être portée. La longueur OP, affectée du signe + ou du signe —, selon le sens dans lequel elle est portée à partir du point O, est l'une des coordonnées du point M; je la nommerai abscisse, et je la désignerai habituellement par la lettre x. La seconde coordonnée, que je désignerai habituellement par la lettre z, est la longueur PM, affectée du signe + ou du signe —, selon que le point M est situé du côté de la convexité, ou du côté de la concavité de l'arc uv.

23. Dans ce système de coordonnées, si le paramètre k est supposé fini, toute ligne dont la définition est indépendante du

(1) Si dans la formule (a) on fait k infini, il vient $f(z) = 1$. On en déduit aisément que l'arc de rayon infini se confond avec sa tangente sur une longueur finie quelconque. Soit en effet un arc AV de rayon infini (fig. 19, pl. III) que je suppose différent de sa tangente AT. D'un point V de cet arc j'abaisse VH perpendiculaire sur la normale AX; je mène par le point H l'arc HU, parallèle à AV, compris entre les normales aux points A et V. J'ai $AV > HV$ et $HV > HU$; d'où l'inégalité $AV > HU$, et, par conséquent, $f(AH) > 1$. Si donc, quel que soit z, la fonction f est égale à 1, il faut que l'arc AV se confonde avec sa tangente, d'où résulte toute la théorie des parallèles.

système de comparaison, sera représentée par une équation générale dans laquelle ce paramètre sera contenu soit explicitement, soit implicitement. Une telle équation sera appelée, pour cette raison, *équation paramétrale*. Elle ne diffèrera de l'équation, telle qu'on l'établirait conformément à la théorie des parallèles dans le système des coordonnées rectilignes rectangulaires, que par l'existence du paramètre absolu. Dans la même hypothèse d'une valeur finie de k, les coordonnées d'un point définies comme ci-dessus (n° 22) seront dites pareillement *coordonnées paramétrales*.

24. *Différentielle d'un arc de courbe quelconque, et longueur d'un arc infiniment petit, en coordonnées paramétrales.*

Soit sur une courbe A B (fig. 21, pl. III) un point M dont les coordonnées sont $x = \mathrm{OP}$, $z = \mathrm{PM}$, et soit s la longueur de l'arc AM, comptée à partir d'une origine A quelconque. A partir du point M je prends sur la courbe un arc MN égal à Δs, dont l'extrémité N a pour coordonnées $x + \Delta x$, $z + \Delta z$. Du point N j'abaisse NQ normale à l'arc $u\,v$ de comparaison, parallèlement auquel je mène par le point M l'arc MR ; j'ai $\mathrm{PQ} = \Delta x$ et $\mathrm{NR} = \Delta z$. La formule (a), appliquée aux arcs MR et PQ ou Δx, fournit entre ces arcs la relation arc $\mathrm{MR} = e^{\frac{z}{k}} \Delta x$. Je suppose maintenant que ces arcs décroissent au delà de toute limite ; je mène les cordes MN et MR. L'angle MRN ayant pour limite un angle droit, je peux appliquer le théorème du n° 13 au triangle MNR, dans lequel je peux substituer aux côtés infiniment petits MN et MR les arcs que ces cordes sous-tendent (n° 14). J'obtiens ainsi la relation :

$$\lim. \frac{e^{\frac{2z}{k}} \Delta x^2 + \Delta z^2}{\Delta s^2} = 1, \quad \text{ou} \lim. \frac{\Delta s^2}{\Delta x^2} = e^{\frac{2z}{k}} + \lim. \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}$$

Remplaçant les limites des rapports $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ par les rapports $\frac{ds}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ entre les différentielles, on obtient la relation :

$$\frac{ds^2}{dx^2} = e^{\frac{2z}{k}} + \frac{dz^2}{dx^2},$$

d'où

$$ds = \sqrt{e^{\frac{2z}{k}} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx. \qquad (b)$$

La longueur Δs de l'arc infiniment petit ne diffère, comme on le sait, de la différentielle ds que d'une fraction infiniment petite d'elle-même, et la formule (b) peut être employée pour exprimer cette longueur.

Cette formule peut aussi s'écrire :

$$ds = \sqrt{e^{\frac{2z}{k}} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, \frac{dx}{dz}\, dz. \qquad (b')$$

J'emploierai souvent dans la suite la lettre t pour représenter l'exponentielle $e^{\frac{z}{k}}$. On a dans ce cas $dt = \frac{t\,dz}{k}$, ou $dz = k\frac{dt}{t}$. La formule (b) devient alors :

$$ds = \sqrt{t^2 + k^2 \frac{dt^2}{t^2\, dx^2}}\, dx. \qquad (b'')$$

25. Il résulte du numéro précédent que si l'équation $z = \Phi(x)$ de la courbe AB est connue, la longueur de l'arc s, dont les extrémités ont pour coordonnés x_1, z_1 et x_2, z_2, se déterminera par une quadrature, soit au moyen de la formule :

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{e^{\frac{2z}{k}} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx, \qquad (c)$$

soit au moyen de la formule équivalente :

$$s = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{e^{\frac{2z}{k}} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, \frac{dx}{dz}\, dz. \qquad (c')$$

Sans faire varier les limites x_1, x_2 de l'intégrale (c), ni les valeurs correspondantes de z, on peut modifier la forme de la fonc-

tion φ d'une infinité de manières ; l'intégrale définie qui exprime la longueur s de l'arc variera ; mais on peut reconnaître, *d'après la formule (c) elle-même*, que la valeur absolue de cette intégrale a un minimum, auquel correspond une certaine forme de la la fonction φ que le calcul suivant a pour objet de déterminer.

26. *Equation paramétrale de la ligne droite.*

Soient deux points M et N qui ont pour coordonnées, le premier x_1, z_1, le second x_2, z_2 ; je me propose de trouver de quelle forme doit être, entre les limites x_1 et x_2 de l'abscisse, l'équation de la plus courte ligne qui puisse être menée dans le plan de M à N ; entre ces mêmes limites l'équation représentera une ligne droite. La méthode des variations conduit à la solution de ce problème.

Si je pose $\frac{dz}{dx} = z'$, la longueur s d'un arc de courbe dont les extrémités ont pour abscisses x_1 et x_2 est, d'après le numéro précédent, donnée par la formule :

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{e^{\frac{2z}{k}} + z'^2}\, dx\,,$$

que j'écrirai, en posant $\sqrt{e^{\frac{2z}{k}} + z'^2} = \mathrm{V}$, sous la forme abrégée :

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}\, dx.$$

Si je désigne par Z et Z' les dérivées partielles de V, prises, la première par rapport à z, la seconde par rapport à z', la variation infiniment petite δs de l'arc aura pour expression l'intégrale définie :

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta z \left(\mathrm{Z} - \frac{d\mathrm{Z}'}{dx}\right) dx,$$

δz représentant la variation de z lorsque les abscisses x ne subissent pas de variation.

Or, la détermination des dérivées partielles de V donne pour Z et Z' des valeurs qui peuvent être mises sous les formes suivantes :

$$Z = \frac{e^{\frac{2z}{k}}}{k\,V} \quad \text{et} \quad Z' = \frac{z'}{V}.$$

On aura de même, en posant $\frac{d\,z'}{d\,x} = z''$:

$$\frac{dZ'}{dx} = \frac{k\,e^{\frac{2z}{k}}\,z'' - e^{\frac{2z}{k}}\,z'^2}{k\,V^3}.$$

Si l'on remplace, dans l'expression de δs, Z et $\frac{dZ'}{dx}$ par leurs valeurs, et qu'on mette $\frac{e^{\frac{2z}{k}}}{k\,V^3}$ en facteur commun sous le signe $\int$, il vient :

$$\delta s = \int_{x_1}^{x_2} \delta z.\ \frac{e^{\frac{2z}{k}}}{k\,V^3}\,(V_2 - k\,z'' + z'^2)\,d\,x.$$

Lorsque s est un minimum, δs est nul, ce qui exige, comme on sait, que l'expression sous le signe $\int$, qui multiplie les infiniment petits δz et dx, soit nulle. De là l'équation :

$$\frac{e^{\frac{2z}{k}}}{k\,V^3}\,(V^2 - k\,z'' + z'^2) = 0,$$

qui peut être satisfaite de deux manières : 1° si l'on a $\frac{e^{\frac{2z}{k}}}{k\,V^3} = 0$, 2° si l'on a $V^2 - k\,z'' + z'^2 = 0$.

La première de ces deux équations est incompatible avec l'hypothèse d'une valeur finie de k ; d'ailleurs les conséquences

de l'hypothèse contraire qui comprennent la théorie des parallèles, et par suite les formules ordinaires de géométrie analytique, se déduisent de la deuxième équation si l'on y fait k infini; car l'équation ne peut alors subsister qu'à la condition que l'on ait $z'' = 0$, d'où l'on tire, par double intégration, l'équation de la ligne droite sous la forme connue $y = px + q$. L'équation $V^2 - kz'' + z'^2 = 0$ renferme donc à elle seule la solution complète du problème, quelque hypothèse qu'il plaise faire sur la valeur de k.

Si j'y remplace V^2 par sa valeur, il vient:

$$e^{\frac{2z}{k}} + 2z'^2 - kz'' = 0,$$

équation différentielle qui convient à la portion de droite comprise entre les points M et N. Mais cette équation ne contient pas les limites de l'intégration, ni les valeurs de la fonction à ces limites; elle a donc pour intégrale générale l'équation générale d'une droite indéfinie. On trouve ainsi pour l'équation paramétrale de la ligne droite (voir le développement des calculs, tableau A, à la suite du chapitre complémentaire) l'équation

$$(x - P)(x - Q) = -k^2 e^{\frac{-2z}{k}} \qquad (d)$$

dans laquelle P et Q sont des constantes arbitraires, et qui peut s'écrire aussi:

$$z = \frac{-k}{2} l. \frac{(x - P)(Q - x)}{k^2} \qquad (d')$$

La coordonnée z n'étant susceptible que d'une seule valeur pour chaque valeur de x, l'équation représente une droite unique.

Si l'on pose $e^{\frac{z}{k}} = t$, l'équation prend la forme:

$$(x - P)(x - Q) = -k^2 t^{-2} \qquad (d'')$$

27. Si deux points ont pour coordonnées, l'un x_1, z_1, l'autre x_2, z_2, on déterminera les valeurs de P et de Q relatives à la droite

qui passe par ces deux points, en substituant dans l'équation générale les coordonnées x_1, z_1 et x_2, z_2 aux coordonnées courantes.

On obtiendra ainsi deux équations qui donneront $P \times Q$ et $P + Q$; et les deux longueurs P, Q seront les racines d'une équation du second degré facile à établir.

28. *Discussion sommaire de l'équation paramétrale de la ligne droite.*

Je prends cette équation sous la forme :

$$z = -\frac{k}{2} l. \frac{(x - P)(Q - x)}{k^2}.$$

Pour que z soit réel, il faut que $(x - P)(Q - x)$ soit positif, et par suite que x soit compris entre les deux limites P et Q. Entre ces limites z varie d'une manière continue en même temps que x, et ne devient infini que pour les valeurs extrêmes P et Q de l'abscisse. La droite est donc comprise entre deux normales à l'arc de comparaison correspondantes aux abscisses P et Q. On reconnaîtra aisément, à l'aide de la formule (a), qu'elle s'approche indéfiniment de ces deux normales, quelque valeur finie qu'on suppose au paramètre k (1).

En second lieu, si l'abscisse x, restant comprise entre P et Q, tend vers l'une quelconque de ces deux limites, le produit

(1) Soit, par exemple, Q la limite supérieure des abscisses. Si, par le point de la droite dont l'abscisse est $Q - \alpha$, je mène un arc parallèle à l'arc de comparaison et compris entre la droite et la normale correspondante à l'abscisse Q, la longueur l de cet arc sera, d'après la formule (a), $\alpha \times e^{\frac{z}{k}}$. De l'équation de la droite on tire $e^{\frac{z}{k}} = \frac{k}{\sqrt{\alpha(x - P)}}$, d'où $l = \frac{k\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x - P}}$. Donc, si k n'est pas infini, l tend vers zéro en même temps que α.

$(x - P)(Q - x)$ tend vers zéro ; l'un des facteurs devenant infiniment petit, le logarithme de $\frac{(x-P)(Q-x)}{k^2}$ devient négatif et croît en valeur absolue au delà de toute limite ; z prend, par suite, des valeurs positives plus grandes que toute quantité donnée. Ainsi, quelle que soit la droite représentée par une équation de l'une des formes équivalentes (d), (d') ou (d''), elle peut être suffisamment prolongée dans chaque sens pour fournir des points situés du côté de la convexité par rapport à l'arc de comparaison.

29. Examinons ce que devient l'équation d'une droite lorsqu'une des deux limites P et Q de l'abscisse croît indéfiniment en valeur absolue.

L'équation générale prise sous la forme (d''), et résolue par rapport à x, peut s'écrire :

$$x = \frac{P+Q}{2} \pm \frac{Q}{2}\sqrt{1 - \frac{2P}{Q} + \frac{P^2 t^2 - 4k^2}{Q_2 t^2}}.$$

On peut faire Q assez grand pour que le radical du second membre soit développable en série par la formule de Taylor pour toute valeur de t inférieure à une limite donnée, qui peut d'ailleurs être aussi grande qu'on veut. Si l'on effectue ce développement et qu'on supprime les termes qui, après avoir été multipliés par le facteur $\frac{Q}{2}$ du radical, contiendraient encore Q en dénominateur, lesquels termes s'évanouissent quand on fait Q infini, l'équation se réduit à :

$$x = \frac{P+Q}{2} \pm \frac{Q-P}{2},$$

et ne donne pour x que les deux valeurs Q et P, dont la seconde seule est finie. La droite est donc représentée dans ce cas par l'équation $x = P$: c'est une normale à l'arc de comparaison.

La seconde valeur Q de l'abscisse, Q étant infini, s'explique aisément, si l'on remarque que la normale à une circonférence

coupe cette circonférence en deux points diamétralement opposés, dont la distance devient infinie, si le rayon devient infini lui-même.

30. *Distance de deux points donnés par leurs coordonnées.*

Je suppose connue l'équation de la droite qui joint ces points; si elle n'est pas donnée, il sera toujours facile de l'établir.

La longueur D de la droite entre les deux points dont les abscisses sont x_1 et x_2 sera donnée par la formule (c), et l'on aura :

$$D = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{e^{\frac{2z}{k}} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx$$

De l'équation de la droite, mise sous l'une des formes (d) ou (d'), on tire :

$$e^{\frac{2z}{k}} = -\frac{k^2}{(x-P)(x-Q}$$

et

$$\frac{dz}{dx} = \frac{k(2x-P-Q)}{2(x-P)(x-Q)}.$$

Si l'on remplace sous le radical $e^{\frac{2z}{k}}$ et $\frac{dz}{dx}$ par leurs valeurs, l'expression à intégrer devient, après réduction :

$$\pm \frac{k(P-Q)\,dx}{2(x-P)(x-Q)}.$$

Intégrant cette expression entre les limites x_1 et x_2, on obtient la formule suivante :

$$D = \pm\frac{k}{2}\, l.\left(\frac{x_1-P}{x_1-Q}\cdot\frac{x_2-Q}{x_2-P}\right),$$

qui peut aussi s'écrire :

$$e^{\pm\frac{2D}{k}} = \frac{x_1-P}{x_1-Q}\cdot\frac{x_2-Q}{x_2-P}. \qquad (e)$$

31. *Remarque.* Si, x_1 restant constant, je considère le second membre comme fonction de la variable x_2, sa dérivée est $\frac{x_1 - P}{x_1 - Q} \cdot \frac{Q - P}{(x_2 - P)^2}$, expression dont la valeur conserve toujours le même signe, quel que soit x_2. Le second membre est donc ou toujours croissant, ou toujours décroissant. Il varie d'ailleurs d'une manière continue sans passer par l'infini, lorsque x_2 reste compris entre les limites P et Q. Or, si x_2 est égal à x_1, le second membre de la formule (*e*) se réduit à *un ;* il croît indéfiniment si x_2 s'approche indéfiniment de P. Donc, pour toute valeur de x_2 comprise entre x_1 et P, le second membre est plus grand que 1. Il est au contraire plus petit que 1 pour toute valeur de x_2 comprise entre x_1 et Q.

On en déduit que si, en vertu de certaine convention, les distances comptées sur la droite donnée à partir du point dont l'abscisse est x_1, doivent être considérées comme positives lorsque x_2 est compris entre x_1 et P, et comme négatives lorsque x_2 est compris entre x_1 et Q, l'exposant $\frac{2D}{k}$ dans le premier membre de la formule (*e*) doit être affecté du signe $+$; il devra être affecté du signe — dans le cas d'une convention contraire.

32. *Equation paramétrale de la circonférence.*

La formule (*e*) donne le moyen de trouver l'équation d'une circonférence de rayon R, dont le centre C (fig. 22, pl. III) a pour coordonnées $OA = \alpha$ et $AC = \gamma$.

Soit M un point de la circonférence, et x, z ses deux coordonnées. Une droite H L, dont les coordonnées courantes seraient X et Z, est représentée, si l'on pose $e^{\frac{Z}{k}} = T$, par une équation de la forme suivante (n° 26) :

$$(X - P)(X - Q) = - k^2 T^{-1}.$$

Si la droite HL passe par les points M et C, son équation devra être satisfaite lorsqu'on y remplacera successivement les coordonnées courantes par celles de ces deux points, et l'on

devra avoir, en posant $e^{\frac{z}{k}} = t$ et $e^{\frac{\gamma}{k}} = \theta$:

$$(x - \mathrm{P})(x - \mathrm{Q}) = -k^2 t^{-2} \qquad (1)$$

$$(\alpha - \mathrm{P})(\alpha - \mathrm{Q}) = -k^2 \theta^{-2} \qquad (2)$$

La distance CM étant égale au rayon donné R, on aura, d'après la formule (e) :

$$\frac{x - \mathrm{P}}{x - \mathrm{Q}} \times \frac{\alpha - \mathrm{Q}}{\alpha - \mathrm{P}} = e^{\pm \frac{2\mathrm{R}}{k}}. \qquad (3)$$

Eliminant P et Q entre les équations (1), (2), (3), on obtient l'équation suivante (voir le développement des calculs, tableau B), qui représente la circonférence proposée :

$$t^2 (x - \alpha)^2 = -\frac{k^2}{\theta^2}\left(t - \theta e^{-\frac{\mathrm{R}}{k}}\right)\left(t - \theta e^{+\frac{\mathrm{R}}{k}}\right).$$

Si je pose $e^{\frac{\gamma - \mathrm{R}}{k}} = \rho$, $e^{\frac{\gamma + \mathrm{R}}{k}} = \rho'$, cette équation, dans laquelle $\theta e^{-\frac{\mathrm{R}}{k}}$ est égal à ρ, $\theta e^{+\frac{\mathrm{R}}{k}}$ à ρ' et θ^2 à $\rho\rho'$, peut s'écrire :

$$t^2 (x - \alpha)^2 = -\frac{k^2}{\rho\rho'}(t - \rho)(t - \rho') . \qquad (f)$$

ρ et ρ' sont les deux valeurs de t correspondant à la valeur α de x et fournissant les deux points S et S' de la circonférence, situés sur le diamètre normal à l'arc de comparaison ; elles sont liées l'une à l'autre par la relation $\rho\rho' = \theta^2$.

33. *Equation paramétrale de l'arc de rayon infini.*

L'équation générale de la circonférence conduit à l'équation de l'arc de rayon infini qu'il importe pour la suite de connaître.

L'équation (f) peut s'écrire :

$$(x - \alpha)^2 = -k^2 t^{-2}\left(\frac{t}{\rho} - 1\right)\left(\frac{t}{\rho'} - 1\right).$$

Si le centre de la circonférence, dont les coordonnées sont α et γ, s'éloigne indéfiniment sur une droite quelconque, on a vu (n° 28) que γ prend des valeurs positives plus grandes que toute quantité donnée. Le rayon R est essentiellement positif,

et $e^{\frac{\gamma+R}{k}}$, ou ρ', croît au delà de toute limite ; $\frac{t}{\rho'}$ tend donc vers zéro pour toute valeur finie de t. Soit α_1 la limite de α, l'équation (f) devient à la limite :

$$(x-\alpha_1)^2 = k^2 t^2 \left(\frac{t}{\rho} - 1\right). \qquad (g)$$

La droite sur laquelle se déplace le centre dont l'abscisse a pour limite α_1, a une équation de la forme :

$$(X-\alpha_1)(X-P) = -k^2 T^{-2}. \qquad (h)$$

Cette droite est une normale à l'arc de rayon infini représenté par l'équation (g), et, P pouvant être quelconque, l'équation (h) est l'équation générale de ces normales.

L'équation (h) comprend comme cas particulier (n° 29), lorsque P est infini, l'équation $X = \alpha_1$, laquelle représente une normale commune à l'arc proposé et à l'arc de comparaison. On reconnaîtra facilement que ces deux arcs ne peuvent avoir aucune autre normale commune.

La quantité ρ qui figure dans l'équation de l'arc n'est autre que la valeur de t qui correspond à la valeur α_1 de x.

34. Appliquant la formule (c') à l'équation (g), on obtient pour la longueur S de l'arc de rayon infini dont les extrémités ont pour coordonnées X, Z et x, z :

$$S = \pm\left[e^{\frac{z}{k}}(x-\alpha) - e^{\frac{Z}{k}}(X-\alpha)\right]. \qquad (i)$$

35. Les formules (b) et (c) donnent les moyens de déterminer analytiquement des longueurs infiniment petites ou finies, comptées sur des courbes dont les équations sont connues. Les angles étant proportionnels aux arcs qu'ils interceptent sur des circonférences égales décrites de leurs sommets comme centres, pourront être comparés au moyen de ces formules, qui permettront ainsi d'en déterminer la mesure. Il en est de même des superficies planes, lesquelles se mesurent (chap. compl. n° XI) par des sommes de produits dont les deux facteurs sont linéaires.

Quant aux autres grandeurs qu'on peut avoir à considérer dans un plan, elles ne peuvent être déterminées qu'à l'aide de quantités déjà définies, ce qui en ramène la mesure à celle de longueurs, d'angles ou de superficies, c'est-à-dire finalement, dans tous les cas, à celle de longueurs, et, par conséquent, les rend calculables, lorsque la figure à laquelle ces grandeurs se rapportent, est déterminée analytiquement dans toutes ses parties.

36. Quelle que soit une relation géométrique qu'on se propose de déterminer dans une figure plane, elle pourra donc être déduite des formules générales qui ont été établies dans les numéros précédents. Le résultat qu'on obtiendra ainsi, tiré exclusivement de formules dans lesquelles un paramètre reste inconnu, ne pourra assurément jamais, fût-il combiné de quelque façon qu'on voudra avec les formules mêmes desquelles il a été déduit, conduire à la détermination de ce paramètre.

D'ailleurs il est clair que si dans la démonstration d'une proposition de géométrie on ne s'appuie que sur des axiomes auxquels les formules soient soumises, on pourra reproduire le même raisonnement, et en tirer la même conclusion, sans l'intermédiaire de la figure, en s'attaquant directement aux formules qui, de quelque manière qu'on les combine, laisseront toujours indéterminée la longueur absolue k. Il serait donc prouvé que la théorie des parallèles, qui suppose k infini, exige un postulatum, s'il était reconnu que, tant qu'on s'en affranchit, tous les axiomes dont on peut faire usage sont toujours vérifiés par les formules paramétrales, quelque valeur qu'on suppose au paramètre absolu.

Je n'ai à m'occuper que des axiomes particuliers à la géométrie, et non des axiomes généraux d'analyse, auxquels les formules, par leur nature même, sont forcément soumises. Or, les axiomes de géométrie sont tous, à l'exception du postulatum, contenus dans les trois propositions suivantes (voir chap. compl. n° I et suivants) qu'on peut, par conséquent, leur substituer :

1° Soit dans une figure invariable, un point P et une droite L passant par ce point; la figure peut être transportée d'un lieu

de l'espace dans un autre, de manière que le point P coïncide avec un point P' quelconque fixe dans l'espace, et que la droite L s'applique exactement sur une droite L', quelle qu'elle soit, menée par le point P' (d'après le principe suivant, il suffit, pour que les deux droites coïncident, qu'elles aient deux points communs). En outre, si la figure ne se réduit pas à la seule droite L, elle pourra changer de lieu dans l'espace en tournant autour de deux points fixes pris sur cette ligne, et ce mouvement de rotation pourra être continué indéfiniment.

2° Par deux points on ne peut faire passer qu'une seule ligne droite.

3° Le lieu des points dont les distances à deux points fixes sont constantes, est une courbe fermée unique, en dehors de laquelle aucun point de l'espace ne fait partie du lieu (1).

Toutes les fois qu'on invoque la première de ces trois propositions, on conçoit deux figures dont l'une reste fixe, et dont l'autre change de lieu dans le plan. Je peux toujours, pour fixer leur première position relative, les concevoir rapportées à un système quelconque de comparaison, sans toucher en rien à la démonstration géométrique; je ne modifierai pas davantage cette démonstration si, au moment où je déplace une des figures en la faisant glisser d'une manière quelconque dans son plan, je suppose en même temps qu'elle entraîne avec elle le système de comparaison, et l'amène dans une position différente de la première. C'est après ce déplacement que j'ai à appliquer le premier des trois principes énoncés plus haut, pour en tirer quelque relation entre les éléments de la partie qui est restée fixe et ceux de la partie que j'ai déplacée; mais si, faisant abstraction de la figure, je veux raisonner sur les formules, je reconnais que ces éléments, rapportés maintenant à deux systèmes différents, ont des expressions qui ne sont pas compa-

(1) Je ne présente pas ces trois propositions comme les axiomes qu'il conviendrait de choisir dans un traité de géométrie pour y rapporter toutes les autres. J'ai choisi ces énoncés uniquement parce que ce sont ceux qui m'ont paru conduire le plus promptement au but que je me propose.

rables ; pour les rendre telles, il faudrait ramener le système de comparaison à sa position première, et modifier, par conséquent, les formules par une transformation de coordonnées. On introduira ainsi des constantes dont la valeur se déterminera par les conditions qui définissent la nouvelle position de la figure déplacée. Si cette modification n'altère la mesure d'aucun élément, toutes les applications du premier principe se trouveront vérifiées au moyen des formules. Le second principe se trouvera aussi vérifié par là même ; car le plus court chemin d'un point à un autre, c'est-à-dire ici la ligne dont l'équation rend l'intégrale $\int \sqrt{e^{\frac{2z}{k}} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx$ un minimum, jouira de la même propriété par rapport à tout système de comparaison dans le plan. Il sera donc certain que les deux premiers principes ne peuvent suffire, en géométrie plane, à établir la théorie des parallèles.

On est ainsi conduit à chercher quelles sont les formules générales de transformation de coordonnées.

Quant au troisième principe, comme il énonce une proposition qui suppose la considération de points en dehors du plan, ce n'est que dans le chapitre suivant, lorsque les formules paramétrales à trois coordonnées auront été établies, qu'il y aura lieu de s'en occuper.

37. *Transformation de coordonnées.*

Soient x et z les coordonnées d'un point M (fig. 23, pl. III) dans un premier système de comparaison déterminé par l'arc uv de rayon infini, et par l'origine O située sur cet arc. Soit $u'v'$ un second arc de rayon infini dont l'équation, d'après la formule (g) du n° 33, peut s'écrire, en désignant par X et Z les coordonnées courantes :

$$e^{\frac{2Z}{k}} (X - \alpha)^2 = k^2 \left(\frac{e^{\frac{Z}{k}}}{\rho} - 1 \right),$$

et soient X_0 et Z_0 les coordonnées d'un point O' sur cet arc.

Je me propose de déterminer les coordonnées x' et z' du point

M rapporté à l'arc $u'v'$ et à l'origine O'. Du point M j'abaisse la droite MN normale à $u'v'$, et je désigne par X_1, Z_1 les coordonnées du pied N de cette normale dans le premier système. Les nouvelles coordonnées sont représentées sur la figure par la longueur rectiligne MN et par la longueur de l'arc O' N.

Posant $e^{\frac{Z}{k}} = T$, $e^{\frac{Z_0}{k}} = T_0$, $e^{\frac{Z_1}{k}} = T_1$, $e^{\frac{z}{k}} = t$, et $e^{\frac{z'}{k}} = t'$, on a pour déterminer x' et t', et par suite z' les cinq équations suivantes :

$$T_1^2 (X_1 - \alpha)^2 = k^2 \left(\frac{T_1}{\rho} - 1 \right) \qquad (1)$$

qui exprime que N est sur l'arc $u'v'$;

$$\begin{cases} (X_1 - \alpha)(X_1 - P) = -k^2 T_1^{-2} & (2) \\ (x - \alpha)(x - P) = -k^2 t^{-2} & (3) \end{cases}$$

qui expriment, conformément à la formule (h) que les deux points N et M sont sur une même normale à $u'v'$;

$$\begin{cases} t'^2 = \dfrac{x - \alpha}{x - P} \cdot \dfrac{X_1 - P}{X_1 - \alpha} & (4) \\ x' = T_1 (X_1 - \alpha) - T_0 (X_0 - \alpha) & (5) \end{cases}$$

qui expriment, conformément aux formules (e) et (i), que les nouvelles coordonnées sont égales, z' à MN et x' à O'N.

Les valeurs de x' et de t', se déduisent de ces cinq équations, en éliminant X_1, T_1 et P. On obtient ainsi (voir le développ. des calculs, tableau C) les formules suivantes :

$$x' = \frac{k^2 t^2 (x - \alpha)}{\rho \left[k^2 + t^2 (x - \alpha)^2 \right]} - T_0 (X_0 - \alpha) \qquad (j)$$

$$t' = \frac{\rho}{k^2 t} \left[k^2 + t^2 (x - \alpha)^2 \right], \qquad (j')$$

dans lesquelles les constantes sont liées entre elles par la relation

$$T_0^2 (X_0 - \alpha)^2 = k^2 \left(\frac{T_0}{\rho} - 1 \right)$$

que fournit l'équation du nouvel arc de comparaison. En résolvant ces équations par rapport à x et à t, on obtiendrait des formules semblables.

38. La longueur d'un élément linéaire infinitésimal est représentée, sauf une fraction infiniment petite d'elle-même, par la différentielle ds de l'arc sur lequel cette longueur est comptée. On a d'après la formule (b'') :

$$ds^2 = t^2\ dx^2 + k^2\ \frac{dt^2}{t^2}.$$

La formule à appliquer après une transformation de coordonnées serait :

$$ds'^2 = t'^2\ dx'^2 + k^2\ \frac{dt'^2}{t'^2}.$$

En portant dans cette dernière la valeur de t', donnée par la formule (j'), et les valeurs de dx' et de $\frac{dt'}{t'}$, tirées des valeurs de x' et de t', on vérifie (voir le développ. des calculs, tableau D) l'égalité :

$$t'^2\ dx'^2 + k^2\ \frac{dt'^2}{t'^2} = t^2\ dx^2 + k^2\ \frac{dt^2}{t^2},$$

d'où $ds = ds'$.

Une transformation de coordonnées ne peut donc jamais, quelque valeur qu'on donne au paramètre k dans les formules, modifier l'expression d'un élément linéaire, ni par suite celle d'aucune grandeur géométrique, de quelque nature qu'elle soit.

39. Soit MN (fig. 24, pl. III) une ligne droite qui, rapportée à l'arc de comparaison uv et à l'origine O, a pour équation $(x - P)(x - Q) = -K^2 t^{-2}$; soient x_1, z_1 les coordonnées du point M sur cette droite. Soit M′N′ une seconde droite ayant pour équation $(x - P')(x - Q') = -K^2 t^{-2}$, et suivant laquelle, dans une démonstration géométrique, on applique la droite MN en faisant coïncider le point M avec le point M′; soient enfin x_2 et z_2 les coordonnées de ce point M′.

Après avoir mesuré l'angle α que la droite M′N′ fait avec la normale abaissée du point M′ sur l'arc uv, je pourrai poser l'équation d'une droite faisant le même angle au point M avec la droite MN, et déterminer analytiquement sur cette droite un point H tel que la longueur MH soit égale à z_2; posant alors l'équation de l'arc $u'v'$ de rayon infini qui, passant par H, est normal

à H M, je pourrai déterminer analytiquement sur cet arc une longueur O′H égale à x_2. Si je prends pour nouveau système de comparaison l'arc u' v' et l'origine O′, le point M aura pour coordonnées les anciennes coordonnées x_2 et z_2 du point M′, et la nouvelle équation de la droite MN, qui fait avec la normale M H un angle égal à α, ne pourra être autre que l'équation de la droite M′N′ dans le premier système.

Il sera donc toujours possible de déterminer les constantes introduites par la transformation de coordonnées, de manière à rendre praticable l'artifice de calcul qui, d'après les considérations exposées au n° 36, doit fournir analytiquement toutes les applications du premier principe à la géométrie plane. J'ai fait voir (n° 36) que le second principe est vérifié par les formules. On est donc en droit de conclure que ces deux principes, appliqués uniquement à la géométrie plane, ne peuvent suffire à démontrer le postulatum d'Euclide; car toutes les conclusions qu'on pourrait en tirer sont implicitement comprises dans les formules paramétrales, lesquelles sont impuissantes à fournir par elles-mêmes la démonstration du postulatum.

Il me reste à généraliser cette conclusion; tel est l'objet du troisième chapitre, dans lequel je suivrai, en traitant de la géométrie dans l'espace, une marche semblable à celle que j'ai suivie dans celui-ci, en traitant des figures dans le plan.

CHAPITRE III.

De la surface de rayon infini. — Détermination au moyen de deux coordonnées de la position d'un point situé sur une surface donnée de rayon infini. — Détermination de la position d'un point quelconque dans l'espace au moyen de trois coordonnées. — Equations générales de la ligne droite. — Expression analytique de la distance de deux points. — Equations générales de la sphère, de la surface de rayon infini et du plan. — Formules de transformation de coordonnées. — Conclusion.

De la surface sphérique de rayon infini.

40. Soit A X (fig. 25, pl. III) une droite indéfinie issue du point A, et O un point quelconque sur cette droite. La sphère passant par le point A et ayant son centre en O, sera engendrée par la rotation autour de l'axe A X d'une demi-circonférence M décrite du point O comme centre avec le rayon O A, dans un plan passant par cet axe. Si le centre s'éloigne indéfiniment sur la droite A X, tout arc de longueur finie, compté à partir du point A sur la demi-circonférence M dont le rayon croît au delà de toute limite, se rapprochera indéfiniment de l'arc A V de rayon infini qui en dérive ; et à une distance finie quelconque du point A, la surface sphérique engendrée par la demi-circonférence, se rapprochera indéfiniment de la surface engendrée par A V. Cette dernière

surface sera appelée *la surface de rayon infini* dérivée de la sphère passant par le point A et dont le centre s'éloigne indéfiniment sur la droite A X.

Le plan perpendiculaire à A X au point A est, de tous les plans qu'on peut mener par ce point, le seul qui ne coupe pas la surface ; il sera dit *tangent*, et la droite A X, qui lui est perpendiculaire, sera dite *normale* à la surface au point A.

41. Si par un point P quelconque de l'arc générateur A V, je mène la normale P R à cet arc, la surface engendrée par la rotation de l'arc P V autour de P R se confond avec celle engendrée par la rotation de l'arc A V autour de A X ; en d'autres termes, la surface de rayon infini est partout identique à elle-même.

En effet, on a vu dans le chapitre précédent que, si le paramètre k est infini, la théorie des parallèles est justifiée ; dans ce cas, la surface de rayon infini est un plan auquel les droites A X et P R sont perpendiculaires, et le théorème est démontré.

Supposons maintenant, au contraire, que le paramètre soit fini. D'après la formule (a), établie au n° 20, je peux prendre sur A X (fig. 26, pl. III) un point O assez éloigné de A pour que l'arc parallèle à A P, mené par ce point et compris entre A X et P R soit, dans l'hypothèse actuelle, aussi petit qu'on voudra. Il en sera de même, à plus forte raison, de sa corde.

Soit O H cette corde ; les longueurs O A et H P, interceptées par des arcs parallèles sur deux normales, sont égales. Si je joins le point H à un point M quelconque de l'arc P V, la droite H M pourra différer aussi peu qu'on voudra de H P, et, par conséquent, de O A.

Soit M′ une quelconque des positions que le point M peut prendre en tournant autour de P R. Je joins par des droites le point M′ aux points O et H. H M′ est égale à H M, et, par conséquent, pourra différer d'aussi peu qu'on voudra de O A ; mais, dans le triangle O M′ H, cette même ligne diffère de O M′ d'une quantité moindre que O H, et qui, par conséquent, peut devenir moindre que toute quantité donnée ; donc, la différence entre O M′ et O A tend vers zéro : ce qui ne peut avoir lieu que si le point M′ est sur la surface engendrée par la rotation de A V autour de A X. Ainsi donc, en tournant autour de P R, le point M, qui est quelconque sur l'arc P V, reste sur cette surface ; ce qui démontre la proposition énoncée.

Les corollaires suivants résultent immédiatement de ce théorème :

La droite PR est normale au point P à la surface de rayon infini.

Deux normales sont toujours dans un même plan.

Par un point quelconque, on peut toujours mener une normale à une surface de rayon infini, et l'on n'en peut mener qu'une.

Toute section normale (c'est-à-dire faite par un plan contenant une normale) est un arc de rayon infini.

Par deux points, on ne peut faire passer qu'une seule section normale.

Par un point de la surface, on peut toujours mener une section normale coupant à angle droit une section normale donnée, et l'on n'en peut mener qu'une.

42. Deux surfaces de rayon infini dérivées de sphères concentriques seront dites *parallèles*.

D'après le premier corollaire du numéro précédent, et d'après les propositions énoncées dans le chapitre II, aux numéros 18 et 19, deux surfaces parallèles ont leurs normales communes, et interceptent sur toutes ces normales des longueurs égales.

43. J'appellerai *triangle sphérique de rayon infini* un contour fermé composé de trois arcs de sections normales.

Les angles d'un tel triangle sont les angles que forment entre eux les plans normaux déterminant les sections.

Remarque. Lorsque deux plans se coupent, leur angle dièdre se mesure par un angle rectiligne, dont le sommet peut être pris en un point quelconque de l'arête. Habituellement on s'appuie sur la théorie des parallèles pour démontrer qu'en tous les points de l'arête, cet angle est le même. On trouvera dans le chapitre complémentaire (n° V) la même proposition démontrée indépendamment de cette théorie.

44. Deux triangles sphériques de rayon infini, qui ont un

côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, sont superposables (les deux triangles ne sont pas nécessairement supposés sur une même surface de rayon infini).

Cette proposition se démontrerait sur les triangles de rayon infini, de la même manière que sur les triangles rectilignes.

45. Deux triangles sphériques de rayon infini, qui ont deux angles égaux chacun à chacun, ont leurs côtés proportionnels.

Lorsqu'on admet la théorie des parallèles, la proposition est démontrée; elle constitue, dans le 3e livre de Legendre, le premier cas de similitude des triangles rectilignes.

Il reste à faire voir que, telle que je viens de l'énoncer, la proposition peut encore être démontrée, en se plaçant dans l'hypothèse où la théorie des parallèles serait inexacte.

Soient ABC, A'B'C' (fig. 27, pl. IV) les deux triangles proposés, dans lesquels les côtés AB et A'B' sont adjacents aux angles homologues égaux. Je mène les trois plans normaux qui déterminent le triangle ABC, et je coupe ces plans suivant LMN par une seconde surface de rayon infini parallèle à celle du triangle ABC. Je pourrai toujours, d'après la formule (*a*), mener cette surface à une distance telle que ML soit égale à A'B' (n° 20); les angles L et M sont égaux aux angles A et B (ch. compl. n° V), et, par suite, aux angles A' et B'; les triangles LMN et A'B'C', ayant un côté égal adjacent à des angles égaux chacun à chacun, sont donc superposables. De là les égalités $A'C' = LN$, $B'C' = MN$. Les longueurs AL, BM, CN sur les trois normales sont égales; il en résulte, d'après le n° 19, que les côtés AB, AC, BC sont proportionnels aux côtés LM, LN, MN, et, par suite, à A'B', A'C', B'C'.

On reconnaît en même temps que l'angle C', égal à l'angle N, est aussi égal à l'angle C.

46. Dans tout triangle sphérique de rayon infini la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

En effet, on peut, d'après le numéro précédent, construire un

triangle dont les trois angles soient égaux à ceux d'un triangle proposé quel qu'il soit, et dont les côtés deviennent plus petits que toute longueur donnée. Or, en reproduisant ici le raisonnement déjà exposé dans le chapitre Ier, au numéro 1, on démontrera que, dans un triangle sphérique infinitésimal de rayon infini, la somme des angles est égale à deux angles droits; il en sera donc de même dans le triangle proposé qui a ses trois angles égaux à ceux d'un triangle infinitésimal.

47. Sur une même surface de rayon infini, deux sections normales qui ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge, seront dites *parallèles*.

Il résulte du dernier corollaire énoncé au n° 41, que deux sections normales perpendiculaires sur une troisième sont parallèles entre elles.

La méthode que Legendre a suivie pour déduire la théorie des parallèles du théorème relatif à la somme des trois angles d'un triangle est applicable aux sections normales, sur la surface de rayon infini. On peut donc énoncer la proposition suivante, comme corollaire du n° 46.

Deux arcs de sections normales parallèles compris entre sections normales parallèles sont égaux.

Du théorème énoncé au n° 45, on déduit, par un raisonnement identique à celui déjà exposé dans le chapitre Ier au n° 13, que dans un triangle sphérique rectangle de rayon infini, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

48. *Détermination au moyen de deux coordonnées de la position d'un point situé sur une surface donnée de rayon infini.*

Je prends pour système de comparaison une section normale uv (fig. 28, pl. IV) menée par un point O de la surface. La position d'un point M sur cette surface sera déterminée lorsqu'on connaîtra la longueur de l'arc MP de section normale mené du point M perpendiculaire à uv, la distance O P mesurée sur l'arc uv depuis l'origine O jusqu'au pied P de la section per-

pendiculaire MP, et le sens dans lequel chacune de ces longueurs doit être portée. La longueur OP affectée du signe + ou du signe —, selon le sens dans lequel elle est comptée à partir du point O, conservera le nom d'abscisse, et sera généralement représentée par la lettre x; la longueur MP affectée du signe + ou du signe —, selon le sens dans lequel elle est comptée à partir du point P, sera généralement désignée par la lettre y.

49. D'après les théorèmes énoncés aux nos 45 et 47, l'équation générale d'une section normale, dans ce système de coordonnées, sera de la forme

$$y = mx + n;$$

La longueur ds d'un élément linéaire différentiel sur la surface de rayon infini sera donnée par la formule:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

et la longueur s de la section normale qui joint deux points ayant pour coordonnées l'un x_0, y_0, l'autre x_1, y_1, sera donnée par la formule :

$$s^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2.$$

On en déduit que la section normale est le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de rayon infini.

En général, on pourra démontrer sur la section normale, dans la surface de rayon infini, toutes les propriétés dont la ligne droite jouit dans le plan, sans exclure celles de ces propriétés qui reposent sur la théorie des parallèles; car le même calcul qu'on effectuerait sur l'équation d'une droite en coordonnées rectilignes s'applique aussi bien à la même équation, lorsqu'elle représente une section normale dans le système de coordonnées que j'ai considéré.

Il en résulte, par exemple, que la section normale MP, que j'ai supposée perpendiculaire à uv est la plus courte qu'on puisse mener du point M à l'arc uv. C'est par cette propriété que je définirai analytiquement la section perpendiculaire à uv menée par le point M, et, par suite, les coordonnées x et y de

ce point. Cette définition paraît devoir simplifier les calculs lorsqu'il s'agira d'établir les formules générales de transformation de coordonnées; en effet, on évitera ainsi d'avoir à mesurer des angles par les arcs de circonférence compris entre leurs côtés, ce qui conduirait, selon toute apparence, à des calculs plus compliqués.

50. *Détermination de la position d'un point quelconque de l'espace au moyen de trois coordonnées.*

Je rapporte tous les points de l'espace à un système de comparaison composé : 1° d'une surface de rayon infini R S (fig. 29, pl. IV); 2° d'une section normale uv de cette surface; 3° d'un point O pris sur cette section.

Soit MP la normale abaissée d'un point M sur la surface R S. La position du point M sera déterminée si l'on connaît d'une part les coordonnées x et y du pied P de la normale rapportées à l'arc uv et à l'origine O des abscisses, d'autre part la longueur P M et le sens dans lequel elle doit être portée suivant la normale à partir du point P. Cette longueur P M, affectée du signe + ou du signe —, selon que le point M est situé du côté de la convexité ou du côté de la concavité de la surface, est la troisième coordonnée du point M, x et y étant les deux autres; je la désignerai habituellement par la lettre z. Je conserve aux coordonnées ainsi définies le nom de coordonnées paramétrales.

51. *Différentielle d'un arc de courbe quelconque dans l'espace, et longueur d'un arc infiniment petit ou fini, en coordonnées paramétrales.*

Soit s la longueur de l'arc A M (fig. 30, pl. IV) comptée sur une courbe quelconque à partir du point A de cette courbe, et soit $\Delta s = \mathrm{M\,M'}$; je désigne par x, y, z les coordonnées O Q, Q P et P M du point M; par $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ les coordonnées O Q', Q' P', P' M' du point M'. Sur la surface de comparaison, je mène l'arc P R parallèle à l'arc uv des abscisses; par le point M, je conçois une surface parallèle à celle de comparaison, qui sera coupée par le plan des deux normales P M, P' M', suivant un arc M N. J'ai, d'après la figure :

$$\Delta x = QQ' = PR\,; \quad \Delta y = P'R\,; \quad \Delta z = M'N.$$

Le triangle sphérique de rayon infini PRP′ étant rectangle en R, on a (n° 47) :

$$\overline{PP'}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{P'R}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 .$$

En outre, on a d'après le n° 20 : $MN = PP' . e^{\frac{z}{k}}$.

De ces deux égalités on tire :

$$\overline{MN}^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\, e^{\frac{2z}{k}} .$$

Je mène les cordes MN et MM′, et je suppose que l'arc MM′ décroisse au delà de toute limite; l'angle MNM′ a pour limite un angle droit, et je peux appliquer le théorème du n° 13 au triangle infinitésimal MM′N dans lequel je peux substituer aux côtés infiniment petits MN et MM′ les arcs que ces cordes sous-tendent (n° 14). J'obtiens ainsi la relation

$$\Delta s^2 = \overline{MN}^2 + \Delta z^2 ,$$

ou, en remplaçant $\overline{MN}^2$ par sa valeur,

$$\Delta s^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\, e^{\frac{2z}{k}} + \Delta z^2 ,$$

ou enfin, en substituant les différentielles aux différences infiniment petites,

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2)\, e^{\frac{2z}{k}} + dz^2 . \qquad (k)$$

Je désignerai souvent, ainsi que j'ai déjà fait dans le chapitre précédent, l'exponentielle $e^{\frac{z}{k}}$ par la lettre t, que j'affecterai d'ailleurs, chaque fois qu'il y aura lieu, des mêmes indices que que la lettre z. La formule (k) devient alors :

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2)\, t^2 + k^2 \frac{dt^2}{t^2} . \qquad (k')$$

L'une quelconque des formules (k) ou (k') donnant la différentielle ds, pourra être également employée pour déterminer

la longueur Δs de l'arc infiniment petit, qui ne diffère de ds que d'une fraction infiniment petite d'elle-même.

Des mêmes formules on tire l'expression de la longueur s d'un arc fini quelconque qui peut être mise sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$s = \int \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) e^{\frac{2z}{k}} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx \quad , \quad (l)$$

$$s = \int \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) t^2 + k^2 \frac{dt^2}{t^2\, dx^2}}\, dx \quad . \quad (l')$$

Les limites de l'intégration sont déterminées par les deux valeurs de l'abscisse x qui correspondent aux deux extrémités de l'arc.

52. *Équations paramétrales de la ligne droite.*

Soit M N (fig. 31, pl. IV) un arc quelconque dont les extrémités se projettent aux points A et B, et soit R S l'arc de section normale passant par ces deux projections ; je dis que, si la projection A C B de l'arc M N sur la surface de comparaison ne se confond pas entièrement avec l'arc A B de section normale, il existe de M à N un autre chemin dont la longueur déterminée par la formule (l) est moindre que celle de l'arc proposé.

En effet, soit σ la distance variable comptée suivant l'arc A C B d'un point quelconque de cet arc au point A ; les trois coordonnées x, y, z des points de la courbe M N, dont A C B est la projection, seront fonctions des valeurs correspondantes de σ. Soit donc $z = \varphi(\sigma)$. Désignant de même par s la distance variable comptée suivant l'arc A S de section normale, d'un point quelconque de cet arc au point A, si j'imagine construit dans le plan de cette section et sur une longueur de projection A B′ égale à A C B, l'arc M N′ qui aurait pour équation dans son plan $Z = \varphi(s)$, la longueur de cet arc déduite de son équation sera la même que celle de l'arc M N. D'ailleurs la section normale étant sur la surface de comparaison le plus court chemin d'un point à un autre, l'arc A B′, égal à A C B, sera plus grand que A B. En outre,

de la manière même dont l'arc M N′ est construit, la normale B′N′ est égale à B N. On démontrera dans ce cas facilement par la géométrie plane, mais sans le secours de la théorie des parallèles (et par conséquent on pourra aussi le vérifier au moyen des seules formules paramétrales à deux coordonnées), que dans le plan R S M la corde M N est plus courte que la corde M N′ (1), et par suite plus courte que l'arc M N′ construit dans ce plan, ou enfin plus courte que l'arc M N. Donc un arc M N qui ne se projette pas entièrement suivant une même section normale, ne peut être le plus court chemin de M à N; donc ce plus court chemin se projette suivant une section normale, dont l'équation est de la forme $y = mx + n$.

Il reste à déterminer le plus court chemin de M à N dans le plan de l'arc R S. Or, l'équation pour laquelle l'intégrale

$$\int \sqrt{e^{\frac{2z}{k}} + \frac{dz^2}{ds^2}}\, ds, \text{ ou } \int \sqrt{e^{\frac{2z}{k}} \frac{ds^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx,$$

est un minimum, a été établie dans le chapitre II (n° 26); elle est de la forme

$$(s - u)(s - v) = -k^2 e^{\frac{-2z}{k}}.$$

Remplaçant s par sa valeur en x et y, j'aurai, d'après la relation $ds^2 = dx^2 + dy^2$, l'équation pour laquelle l'intégrale

$$\int \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) e^{\frac{2z}{k}} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx \text{ est un minimum.}$$

Or, de l'équation $y = mx + n$, je tire $dy = m\,dx$, d'où $ds^2 = (m^2 + 1)\,dx^2$, d'où $s = x\sqrt{m^2 + 1} + C$, C désignant une constante arbitraire.

(1) L'arc R S étant symétrique par rapport à la normale élevée sur le milieu de B B′, un rabattement autour de cette normale ferait coïncider B′N′ avec B N; cette normale est donc perpendiculaire sur le milieu de la droite N N′; or, elle laisse le point M du même côté que le point N; donc M N est plus petit que M N′.

Si je pose $u - C = P\sqrt{m^2+1}$, et $v - C = Q\sqrt{m^2+1}$, il viendra

$$s - u = (x - P)\sqrt{m^2+1} \quad \text{et } s - v = (x - Q)\sqrt{(m^2+1)}$$

On tire de là une seconde expression du produit $(s-u)(s-v)$, qni, égalée à la première, fournit entre x et z l'équation

$$(m^2+1)(x-P)(x-Q) = -k^2 e^{\frac{-2z}{k}} \qquad (m)$$

Si l'on y joint l'équation entre x et y, déjà établie plus haut

$$y = mx + n \qquad (m')$$

on aura un système propre à représenter le plus court chemin entre deux points quelconques; ces deux équations sont donc les équations générales d'une ligne droite.

On remarque, sur l'équation (m), que pour que z soit réel, x doit être compris entre P et Q, et que lorsque x, compris entre ces limites, diffère infiniment peu de l'une d'elles, z devient positif et infiniment grand.

53. Si deux points ont pour coordonnées l'un x_1, y_1, z_1, l'autre x_2, y_2, z_2, on déterminera les valeurs de P, Q, m, n relatives à la droite qui passe par ces deux points en substituant successivement dans les équations générales les coordonnées de chacun d'eux aux coordonnées courantes. On aura ainsi deux équations du 1er degré pour déterminer m et n; les deux autres équations serviront à déterminer P et Q, dont les deux valeurs s'obtiendront par la résolution d'une équation du 2e degré (v. chap. II, n° 27).

54. *Distance de deux points donnés par leurs coordonnées.*

Je suppose connues les équations de la droite qui contient ces points; si elles ne sont pas données, il sera toujours facile de les établir.

Soient donc deux points A et B, situés sur la droite qui a pour équations

$$y = mx + n$$

$$(m^2+1)(x-P)(x-Q) = -k^2 e^{\frac{-2z}{k}},$$

et ayant pour abscisses, le premier x_1, le second x_2. Dans son plan projetant, cette ligne a une équation de la forme

$$(s-u)(s-v) = -k^2 e^{\frac{-2z}{k}}.$$

Soient s_1 et s_2 les valeurs de s correspondantes aux deux points donnés ; la longueur D de la droite entre ces deux points sera donnée par la formule

$$e^{\frac{2D}{k}} = \frac{s_1 - u}{s_1 - v} \cdot \frac{s_2 - v}{s_2 - u}.$$

Si l'on transforme le second membre d'après les formules posées au n° 52, et qui donnent l'expression de $s - u$ et de $s - v$, il vient :

$$e^{\pm\frac{2D}{k}} = \frac{x_1 - P}{x_1 - Q} \cdot \frac{x_2 - Q}{x_2 - P}. \quad (n)$$

55. D'après le raisonnement déjà exposé au n° 31, si en vertu de certaine convention, les distances comptées sur la droite donnée à partir du point dont l'abscisse est x_1, doivent être considérées comme positives lorsque x_2 est compris entre x_1 et P, et comme négatives lorsque x_2 est compris entre x_1 et Q, l'exposant $\frac{2D}{k}$ dans le premier membre de la formule (n) doit être affecté du signe $+$; il devra être affecté du signe $-$ dans le cas d'une convention contraire.

56. *Equation paramétrale de la sphère.*

La formule (n) donne le moyen d'établir l'équation paramétrale d'une sphère de rayon R, dont le centre C (fig. 32, pl. IV) a pour coordonnées α, β, γ.

Soit M un point de la surface sphérique, et x, y, z ses trois coordonnées. D'après les formules (m) et (m'), une droite HL, dont les coordonnées courantes seraient X, Y, Z, est représentée, si

l'on pose $e^{\frac{Z}{k}} = T$, par deux équations de la forme des suivantes :

$$\begin{cases} Y = m\,X + n \\ (m^2+1)(X-P)(X-Q) = -k^2\,T^{-2}. \end{cases}$$

Si la droite H L passe par les points M et C, ses équations devront être satisfaites lorsqu'on y remplacera successivement les coordonnées courantes par celles de ces deux points, et l'on devra avoir, en posant $e^{\frac{z}{k}} = t$ et $e^{\frac{\gamma}{k}} = \theta$:

$$y = m\,x + n \qquad (1)$$

$$(m^2+1)(x-P)(x-Q) = -k^2\,t^{-2} \qquad (2)$$

$$\beta = m\,\alpha + n \qquad (3)$$

$$(m^2+1)(\alpha-P)(\alpha-Q) = -k^2\,\theta^{-2}. \qquad (4)$$

Si à ces quatre équations j'ajoute la suivante :

$$\frac{x-P}{x-Q}\cdot\frac{\alpha-Q}{\alpha-P} = e^{\pm\frac{2R}{k}}, \qquad (5)$$

qui exprime que la distance du point M au centre C est égale au rayon R, il reste, pour résoudre le problème proposé, à éliminer m, n, P et Q entre ces cinq équations.

Cette élimination donne pour l'équation de la sphère (v. le développ. des calculs, tableau E) :

$$t^2\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right] = -\frac{k^2}{\theta^2}\left(t-\theta e^{-\frac{R}{k}}\right)\left(t-\theta e^{+\frac{R}{k}}\right)$$

Si je pose $e^{\frac{\gamma-R}{k}} = \rho$ et $e^{\frac{\gamma+R}{k}} = \rho'$, cette équation dans laquelle $\theta e^{\frac{-R}{k}}$ est égal à ρ, $\theta e^{+\frac{R}{k}}$ à ρ', et θ^2 à $\rho\rho'$, peut s'écrire :

$$t^2\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]=-\frac{k^2}{\rho\rho'}(t-\rho)(t-\rho')$$

ou

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=-k^2t^{-2}\left(\frac{t}{\rho}-1\right)\left(\frac{t}{\rho'}-1\right) \quad (o)$$

ρ et ρ' sont les deux valeurs de t qui correspondent à la valeur α de x, et qui fournissent les deux points S et S' de la sphère situés sur le diamètre normal à la surface de comparaison.

57. *Equation paramétrale de la surface de rayon infini.*

L'équation générale de la sphère conduit à celle de la surface de rayon infini.

En effet, si le centre, dont les coordonnées sont α, β, γ, s'éloigne indéfiniment sur une droite quelconque, α et β tendront vers certaines limites α_1 et β_1, et γ prendra des valeurs positives plus grandes que toute quantité donnée (n° 52).

Le rayon R étant essentiellement positif, $e^{\frac{\gamma+R}{k}}$ ou ρ' croît au delà de toute limite; $\frac{t}{\rho'}$ tend donc vers zéro pour toute valeur finie de t, et la formule (o) donne à la limite pour l'équation générale de la surface de rayon infini :

$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2=k^2t^{-2}\left(\frac{t}{\rho}-1\right). \quad (p)$$

La droite sur laquelle se déplace le centre de la sphère dont cette surface dérive aurait deux équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} y-\beta_1 &= m(x-\alpha_1) \\ (m^2+1)(x-\alpha_1)(x-P) &= -k^2t^{-2} \end{aligned}\right\} \quad (q)$$

dans lesquelles m et P sont arbitraires. Le centre de la sphère d'où dérive la surface considérée peut donc être regardé comme s'éloignant à l'infini sur l'une quelconque des droites que ces équations peuvent représenter lorsqu'on y fait varier m et P.

Conformément aux propriétés énoncées au n° 41, je définirai

analytiquement les normales à la surface de rayon infini, en les considérant comme les positions limites des rayons de la sphère dont cette surface dérive. Les équations (q) sont les équations générales d'une normale à la surface représentée par l'équation (p). Si l'on fait P infini dans les équations (q), on en tire, par un calcul semblable à celui du n° 29, $x = \alpha_1$ et $y = \beta_1$, équations qui représentent une normale commune à la surface considérée et à la surface de comparaison.

58. *Equation paramétrale du plan.*

Soit une droite L représentée par les équations

$$\begin{cases} y = mx + n \\ (m^2+1)(x-\mathrm{P})(x-\mathrm{Q}) = -k^2 t^{-2}. \end{cases}$$

Je me propose de trouver l'équation de la surface contenant toutes les droites qui coupent la droite L, et qui rencontrent à l'infini la normale au système de comparaison menée par le point dont les coordonnées sur cette surface sont α et β.

Soit L' une de ces droites.

Si l'on pose $x - \alpha = x'$ et $y - \beta = y'$, les équations de la ligne L pourront être mises (n° 57) sous la forme

$$\begin{cases} y' = m\,x' + n' \\ (m^2+1)(x'-\mathrm{P}')(x'-\mathrm{Q}') = -k^2 t^{-2} \end{cases}$$

Celles de la génératrice L' seront de la forme :

$$\begin{cases} y' = \lambda\, x' & (1) \\ (\lambda^2+1)\, x'(x'-\mathrm{H}) = -k^2 t^{-2} & (2) \end{cases}$$

Pour que L' rencontre L, il faut que les quatre équations de ces deux droites soient compatibles ; or, les deux équations entre x' et y' donnent $x' = \dfrac{n'}{\lambda - m}$; reportant cette valeur dans les deux équations entre t et x', et égalant les deux valeurs de $-k^2 t^{-2}$ qui en résultent, on obtient l'équation de condition :

$$\begin{aligned} &(\lambda^2+1)(n'+\mathrm{H}\lambda+\mathrm{H}m)\,n' \\ &= (m^2+1)(n'-\mathrm{P}'\lambda+\mathrm{P}'m)(n'-\mathrm{Q}'\lambda+\mathrm{Q}'m) \qquad (3) \end{aligned}$$

Eliminant H et λ entre les équations (1), (2), (3), on obtient pour l'équation cherchée (v. le développ. des calculs, tableau F) :

$$-k^2 t^{-2} = x'^2 + y'^2 - n'(y' + m x') - x'(m^2+1)(P'+Q') \\ -(m^2+1)(m x' - y')\frac{P'Q'}{n'},$$

équation de la forme

$$x'^2 + y'^2 + U x' + V y' = -k^2 t^{-2}.$$

Si l'on remplace x' et y' par leurs valeurs $x-\alpha$ et $y-\beta$, il vient pour l'équation de la surface proposée, une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + A x + B y + C = -k^2 t^{-2}. \qquad (r)$$

Je dis que la surface représentée par une telle équation contient entièrement toute droite menée par deux de ses points. Soient en effet

$$\begin{cases} y = h x + l & (4) \\ (h^2+1)(x-R)(x-S) = -k^2 t^{-2} & (5) \end{cases}$$

les équations d'une droite quelconque. Si cette droite coupe la surface proposée, les coordonnées de l'intersection s'obtiendront en résolvant le système des trois équations (r), (4) et (5). Reportant dans l'équation (r) la valeur d'y donnée par l'équation (4), et égalant les deux valeurs de $-k^2 t^{-2}$ données par les équations (r) et (5) après cette substitution, on obtient la relation suivante :

$$x^2 + (h x + l)^2 + A x + B(h x + l) + C = (h^2+1)(x-R)(x-S).$$

Quand on développe les deux membres, les termes en x^2 se détruisent, et il reste une équation du 1er degré pour déterminer x. Mais si deux valeurs de x satisfont à une telle équation, toutes les valeurs y satisferont, c'est-à-dire que si la droite a deux points communs avec la surface, elle y sera située entièrement. L'équation (r) est donc l'équation d'un plan ; cette équation est d'ailleurs générale, car on peut disposer de A, B et C de manière à faire passer le plan qu'elle représente par trois points donnés quelconques.

59. *Equation générale des plans normaux à une surface de rayon infini.*

Soit une surface de rayon infini quelconque; elle peut être considérée comme dérivée d'une sphère dont le centre s'éloigne au delà de toute limite sur la normale NN' à la surface de comparaison élevée en un certain point N, qui a pour coordonnées sur cette surface α et β (n° 57). L'équation de la surface de rayon infini sera de la forme:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=k^2\,t^{-2}\left(\frac{t}{\rho}-1\right).$$

Les plans normaux sont ceux qui rencontrent NN' à l'infini; ils ont donc pour équation générale l'équation:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\mathrm{A}\,(x-\alpha)+\mathrm{B}\,(y-\beta)=-k^2\,t^{-2} \qquad (s)$$

dans laquelle les longueurs A et B sont des constantes arbitraires.

60. Une surface de rayon infini étant représentée par l'équation

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=k^2\,t^{-2}\left(\frac{t}{\rho}-1\right), \qquad (1)$$

une normale quelconque pourra être représentée par les équations

$$\begin{cases} y-y_0=m\,(x-x_0) & (2)\\ (m^2+1)(x-x_0)(x-\mathrm{P})=-k^2\,t^{-2}, & (3)\end{cases}$$

dans lesquelles m et P sont arbitraires;
et un plan normal quelconque par l'équation

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\mathrm{A}\,(x-x_0)+\mathrm{B}\,(y-y_0)=-k^2\,t^{-2}, \qquad (4)$$

dans laquelle A et B sont arbitraires.

Quand x_0 et y_0 s'annullent, ces équations deviennent:

$$x^2+y^2=k^2\,t^{-2}\left(\frac{t}{\rho}-1\right) \qquad (5)$$

$$y=m\,x \qquad (6)$$

$$(m^2+1)\,x\,(x-\mathrm{P})=-k^2\,t^{-2} \qquad (7)$$

$$x^2+y^2+\mathrm{A}\,x+\mathrm{B}\,y=-k^2\,t^{-2} \qquad (8)$$

Si dans ces quatre dernières on remplace x par $x - x_0$, y par $y - y_0$, et P par P $- x_0$, on retombe sur les équations générales. Donc toute relation qui serait déduite des équations (5), (6), (7), (8), deviendra générale lorsqu'on y changera x en $x - x_0$, y en $y - y_0$, et P en P $- x_0$.

Dans les calculs suivants, je prendrai les équations de la surface de rayon infini, de ses normales et de ses plans normaux sous les formes particulières des équations (5), (6), (7) et 8 ; il sera toujours facile de passer de résultats particuliers fournis par ces équations à des résultats généraux.

61. *Coordonnées du point de rencontre de deux sections normales d'une même surface de rayon infini. Sections normales parallèles.*

D'après la remarque du numéro précédent, je prendrai l'équation de la surface de rayon infini sous la forme :

$$x^2 + y^2 = k^2 t^{-2} \left(\frac{t}{\rho} - 1\right) \qquad (1)$$

Soient :

$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}\, x + \mathrm{B}\, y = - k^2 t^{-2} \qquad (2)$$

et

$$x^2 + y^2 + p\, x + q\, y = - k^2 t^{-2} \qquad (3)$$

les équations de deux plans normaux.

Les coordonnées x, y, z du point où ces deux sections se rencontrent, s'obtiendront en résolvant le système des équations (1), (2), (3) par rapport à x, à y, et à t qui représente la fonction $e^{\frac{z}{k}}$. La résolution conduit aux valeurs suivantes (v. le développ. des calculs, tableau G) :

$$x = \frac{k^2 (\mathrm{B} - q)(\mathrm{A}\, q - \mathrm{B}\, p)}{k^2 \left[(\mathrm{B} - q)^2 + (p - \mathrm{A})^2 \right] + \rho^2 (\mathrm{A}\, q - \mathrm{B}\, p)^2}, \qquad (4)$$

$$y = \frac{k^2 (p - \mathrm{A})(\mathrm{A}\, q - \mathrm{B}\, p)}{k^2 \left[(\mathrm{B} - q)^2 + (p - \mathrm{A})^2 \right] + \rho^2 (\mathrm{A}\, q - \mathrm{B}\, p)^2}, \qquad (5)$$

$$t = \frac{k^2 \left[(\mathrm{B} - q)^2 + (p - \mathrm{A})^2 \right] + \rho^2 (\mathrm{A}\, q - \mathrm{B}\, p)^2}{\rho (\mathrm{A}\, q - \mathrm{B}\, p)^2}. \qquad (6)$$

t est toujours positif, et par conséquent z est toujours réel; mais il devient infini lorsque Aq est égal à Bp. Dans ce cas, les deux sections sont parallèles. Dans tout autre cas, les valeurs de x, de y et de z sont finies, et il y a rencontre.

La condition $Aq = Bp$ du parallélisme peut s'écrire $\frac{A}{B} = \frac{p}{q}$ Ainsi, dans les équations représentant les plans de deux sections normales parallèles, les coëfficients des termes du prémier degré en x et en y sont proportionnels.

62. Soit MN (fig. 33, pl. V) la section dont le plan est représenté par l'équation (2) du n° 61, et RS celle dont le plan est représenté par l'équation (3). Je suppose que les deux sections se rencontrant, la première reste fixe et la seconde se déplace parallèlement à elle-même de RS en R'S'; les coëfficients A et B dans l'équation (2) resteront constants; dans l'équation (3) les coëfficients p et q varieront en conservant entre eux le même rapport.

Soient donc $q = \lambda p$, λ étant une constante.

L'intersection U se déplace suivant un arc UU' de la section MN, et les formules (4), (5), (6) du n° 61 donneront, si l'on y remplace q par sa valeur λp, les coordonnées des différents points de l'arc UU' en fonction de la variable p. Si donc je désigne par p_1 et p_2 les valeurs de p correspondantes aux sections RS et R'S', la longueur l de l'arc UU', qu'il importe pour la suite de connaître, se déterminera au moyen de la formule :

$$\frac{dl^2}{dp^2} = \left(\frac{dx^2}{dp^2} + \frac{dy^2}{dp^2}\right) t^2 + k^2 \frac{dt^2}{t^2\, dp^2},$$

ou

$$l = \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dp^2} + \frac{dy^2}{dp^2}\right) t^2 + k^2 \frac{dt^2}{t^2\, dp^2}}\, dp.$$

Je pose :

$$k^2 \left[(A - p)^2 + (B - \lambda p)^2 \right] + \rho^2 (A\lambda - B)^2 p^2 = D.$$

Les valeurs de x, de y et de t établies au numéro 61 peuvent

se mettre, eu égard à la relation $q = \lambda p$, sous les formes suivantes :

$$x = \frac{k^2 (B - \lambda p)(A\lambda - B)p}{D},$$

$$y = -\frac{k^2 (A - p)(A\lambda - B)p}{D},$$

$$t = \frac{D}{p^2 \rho (A\lambda - B)^2}.$$

Soit $D' = \frac{dD}{dp}$

$$= -2k^2 \left[A - p + \lambda (B - \lambda p) \right] + 2\rho^2 p (A\lambda - B)^2.$$

Il vient :

$$\frac{dx}{dp} = k^2 (A\lambda - B) \frac{D(B - 2\lambda p) - D'(B - \lambda p)p}{D^2},$$

$$\frac{dy}{dp} = -k^2 (A\lambda - B) \frac{D(A - 2p) - D'(A - p)p}{D^2},$$

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{\rho (A\lambda - B)^2} \cdot \frac{D'p^2 - 2pD}{p^4},$$

d'où $$\frac{dt}{t\,dp} = \frac{D'p - 2D}{pD}.$$

Si l'on porte les valeurs de t, de $\frac{dx}{dp}$, de $\frac{dy}{dp}$ et de $\frac{dt}{t\,dp}$ dans l'expression de $\frac{dl^2}{dp^2}$ et qu'on remplace D et D' par leurs valeurs (voir le développement des calculs, tableau H), il vient toute réduction faite :

$$\frac{dl^2}{dp^2} = \frac{k^4 (A^2 + B^2)}{p^4 \rho^2 (A\lambda - B)^2},$$

d'où $\frac{dl}{dp} = \pm \frac{k^2 \sqrt{A^2 + B^2}}{p^2 \rho (A\lambda - B)}$, ou $l = \pm \int_{p_0}^{p_1} \frac{k^2 \sqrt{A^2 + B^2}}{p^2 \rho (A\lambda - B)}$,

d'où enfin :

$$l = \frac{\pm k^2 \sqrt{A^2 + B^2}}{\rho (A\lambda - B)} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right).$$

Soit $B = \mu A$, il vient :

$$l = \pm \frac{k^2 \sqrt{1 + \mu^2}}{\rho (\lambda - \mu)} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right), \qquad (l)$$

formule dans laquelle on retrouve ce théorème que les arcs parallèles de sections normales compris entre sections normales parallèles sont égaux.

63. Si, p_0 et p_1 étant constants, c'est-à-dire les arcs RS et R'S' étant fixes, je fais varier μ, ce qui revient, sur la figure du numéro précédent, à faire tourner MN, par exemple autour du point U, la longueur l de l'arc UU' variera. Pour déterminer son minimum l_1, j'égale à zéro la dérivée de l, en considérant μ comme seule variable, ce qui donne l'équation :

$$\frac{\mu(\lambda - \mu)}{\sqrt{1 + \mu^2}} + \sqrt{1 + \mu^2} = 0, \text{ ou } \mu\lambda + 1 = 0,$$

d'où $\mu = -\lambda^{-1}$.

La longueur minimum l_1 s'obtiendra en portant cette valeur de μ dans la formule (l). Il vient alors :

$$l_1 = \pm \frac{k^2}{\rho \sqrt{\lambda^2 + 1}} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right). \qquad (u)$$

Le plan de la section MN a dans ce cas une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + Ax - A\lambda^{-1} y = -k^2 t^{-2}.$$

Cette section jouit de la propriété d'être la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un quelconque de ses points à la section R'S', ou à une section quelconque parallèle à RS. Donc, conformément à la définition donnée au n° 49, MN est perpendiculaire à toute section parallèle à RS ; réciproquement RS est perpendiculaire à toute section parallèle à MN.

64. Soit $X^2 + Y^2 = k^2 T^{-2} \left(\frac{T}{\rho} - 1\right)$ l'équation d'une surface

de rayon infini (v. n° 60) et $X^2 + Y^2 + p X + \lambda Y = - K^2 T^{-2}$ l'équation d'un plan coupant la surface suivant une section normale R S (fig. 34, pl. V). Il sera facile d'écrire l'équation du plan qui, passant par un point P quelconque de l'espace dont les coordonnées sont α, β, γ, coupe la surface de rayon infini suivant une seconde section normale perpendiculaire à la première.

Cette équation sera, en effet, d'après ce qui précède, de la forme :

$$x^2 + y^2 + A x - A \lambda^{-1} y = - k^2 t^{-2}.$$

Elle devra être satisfaite par les coordonnées α, β, γ ; on devra donc avoir, en posant $e^{\frac{\gamma}{k}} = \theta$,

$$\alpha^2 + \beta^2 + A \alpha - A \lambda^{-1} \beta = - k^2 \theta^{-2},$$

d'où

$$A = - \frac{k^2 + \theta^2 (\alpha^2 + \beta^2)}{\theta^2 (\alpha - \beta \lambda^{-1})}.$$

L'équation du plan de la section perpendiculaire à R S est donc :

$$x^2 + y^2 - \frac{k^2 + \theta^2 (\alpha_2 + \beta^2)}{\theta^2 (\alpha - \lambda^{-1} \beta)} (x - \lambda^{-1} y) = - k^2 t^{-2} \qquad (v)$$

J'ai pris l'équation de la surface de rayon infini sous une forme particulière. Pour résoudre le même problème d'une manière générale, il suffira, d'après la remarque du n° 60, de remplacer dans les données et dans l'équation (v) x, y, α et β par $x - x_0$, $y - y_0$, $\alpha - x_0$ et $\beta - y_0$.

65. Soit un point Q situé sur l'arc M N perpendiculaire à R S, et dont les coordonnées sont α_1, β_1, γ_1 ; le calcul précédent, si l'on y remplace partout $- \lambda^{-1}$ par λ, conduira à l'équation du plan de la section R' S' menée par ce point parallèle à R S. Cette équation sera donc la suivante :

$$x^2 + y - \frac{k^2 + \theta_1^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{\theta_1^2 (\alpha_1 + \lambda \beta_1)} (x + \lambda y) = - k^2 t^{-2},$$

dans laquelle θ_1 représente l'expression $e^{\frac{\gamma_1}{k}}$.

La longueur l de l'arc NQ, perpendiculaire à R S et compris entre RS et R'S' sera donc, d'après la formule (u) :

$$l = \pm \frac{k^2}{\rho\sqrt{\lambda^2+1}} \left[\frac{1}{p} + \frac{\theta_1^2(\alpha_1 + \lambda\beta_1)}{k^2 + \theta_1^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \right] . \qquad (w)$$

66. *Remarque.* Si le point Q est le pied de la normale menée par le point P, le point P est situé dans le plan de la section R'S'; ses coordonnées doivent donc satisfaire à l'équation de ce plan. On en déduit l'égalité suivante :

$$\frac{\theta^2(\alpha + \lambda\beta)}{k^2 + \theta^2(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{\theta_1^2(\alpha_1 + \lambda\beta_1)}{k^2 + \theta_1^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}$$

Si je substitue dans la formule (w) la première de ces deux quantités à la seconde, il vient :

$$l = \pm \frac{k^2}{\rho\sqrt{\lambda^2+1}} \left[\frac{1}{p} + \frac{\theta^2(\alpha + \lambda\beta)}{k^2 + \theta^2(\alpha^2 + \beta^2)} \right] , \qquad (w')$$

formule qui donne la longueur l ou QN en fonction des coordonnées du point P.

67. Etant donnée l'équation $X^2 + Y^2 = k^2 T^{-2}\left(\frac{T}{\rho} - 1\right)$ d'une surface de rayon infini, je me propose de trouver l'intersection de cette surface avec la normale qui lui serait menée par un point quelconque de l'espace dont les coordonnées sont x, y, z, et la distance de ce point au pied de la normale.

Les équations de la normale sont de la forme :

$$Y = m X$$
$$(m^2 + 1) X (X - P) = - k^2 T^{-2} .$$

Les valeurs X_1, Y_1, T_1, qui déterminent le lieu de l'espace où la normale coupe la surface proposée, s'obtiendront en fonction de m et de P en résolvant le système des trois équations représentant la surface et sa normale. On trouve ainsi les expressions suivantes (v. le développ. des calculs, tableau I) :

$$X_1 = \frac{k^2 P}{k^2 + \rho^2 P^2 (m^2 + 1)},$$

$$Y_1 = \frac{m k^2 P}{k^2 + \rho^2 P^2 (m^2 + 1)},$$

$$T_1 = \frac{k^2 + \rho^2 P^2 (m^2 + 1)}{\rho P^2 (m^2 + 1)},$$

dans lesquelles il reste à remplacer P et m par leurs valeurs.

Pour déterminer ces valeurs, les coordonnées x, y, z du point par lequel la normale est menée devant satisfaire aux équations de cette normale, on a, en posant $e^{\frac{z}{k}} = t$, les équations suivantes :

$$y = m x$$

$$(m^2 + 1) x (x - P) = - k^2 t^2 ;$$

d'où l'on tire $m = \frac{y}{x}$ et $P = \frac{k^2 + t^2 (x^2 + y^2)}{t^2 (x^2 + y^2)} x$.

Reportant ces valeurs dans les expressions de X_1, Y_1, T_1, on a

$$X_1 = k^2 t^2 x \frac{k^2 + t^2 (x^2 + y^2)}{k^2 t^4 (x^2 + y^2) + \rho^2 [k^2 + t^2 (x^2 + y^2)]^2}, \qquad (x)$$

$$Y_1 = k^2 t^2 y \frac{k^2 + t^2 (x^2 + y^2)}{k^2 t^4 (x^2 + y^2) + \rho^2 [k^2 + t^2 (x^2 + y^2)]^2}, \qquad (x')$$

$$T_1 = \frac{k^2 t^4 (x^2 + y^2) + \rho^2 [k^2 + t^2 (x^2 + y^2)]^2}{\rho [k^2 + t^2 (x^2 + y^2)]^2}. \qquad (x'')$$

La distance D du point proposé au pied de la normale est donnée, d'après le n° 54, par la formule :

$$e^{\pm \frac{2D}{k}} = \frac{X_1 - P}{X_1} \times \frac{x}{x - P}.$$

Si la distance comptée à partir du pied de la normale doit, en vertu d'une convention, être considérée comme positive lorsque

x est plus voisin de P que X_1, c'est-à-dire lorsque le point par lequel la normale est menée est situé du côté de la convexité par rapport à la surface proposée, et comme négative dans le cas contraire, l'exposant $\frac{2D}{k}$ du premier membre doit être affecté du signe + (n° 55), et lorsque dans le second membre on remplace X_1 et P par leurs valeurs, il vient, pour déterminer D, la formule :

$$e^{\frac{2D}{k}} = \rho^2 \frac{[k^2 + l^2(x^2+y^2)]^2}{k^4 l^2},$$

ou

$$e^{\frac{D}{k}} = \rho \frac{k^2 + l^2(x^2+y^2)}{k^2 l}. \qquad (y)$$

68. *Formules de transformation de coordonnées.*

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M (fig. 35, pl. V) dans un premier système de comparaison déterminé par une surface S de rayon infini, par la section normale uv de cette surface, et par l'origine O sur cette section. Je me propose d'exprimer en fonctions de x, de y et de z les coordonnées x', y', z du même point dans un second système de comparaison déterminé par une surface S' de rayon infini, par la section normale $u'v'$ de cette surface, et par l'origine O' sur cette section.

Je suppose l'équation donnée de la surface S' (voir n° 60) de la forme :

$$X^2 + Y^2 = k^2 T^{-2}\left(\frac{T}{\rho} - 1\right). \qquad (1)$$

L'équation donnée du plan de la section $u'v'$ sera de la forme

$$X^2 + Y^2 + RX + fRy = -k^2 T^{-2}. \qquad (2)$$

Soient A, B, C les coordonnées de la nouvelle origine, lesquelles sont assujetties à satisfaire aux équations (1) et (2).

Par le point M je mène la droite MP normale à la surface S', et par son pied sur cette surface je mène la section normale PQ perpendiculaire à $u'v'$. Les coordonnées x', y', z' du point M dans le second système sont représentées sur la figure par les lignes O'Q, QP et PM.

Soient X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées du point P ; X_2, Y_2, Z_2 celles du point Q dans le premier système. Je pose

$$e^{\frac{z}{k}} = t; \quad e^{\frac{Z_1}{k}} = T_1; \quad e^{\frac{Z_2}{k}} = T_2; \quad e^{\frac{C}{k}} = \Theta \quad \text{et} \quad e^{\frac{z'}{k}} = t'.$$

La formule (y), appliquée à la distance PM, donne immédiatement :

$$t' = \rho \frac{k^2 + t^2 (x^2 + y^2)}{k^2 t}. \qquad (z)$$

La formule (w') appliquée à l'arc PQ mené perpendiculairement à $u'v'$ par le pied de la normale MP donne :

$$y' = \frac{\pm k^2}{\rho\sqrt{1+f^2}} \left[\frac{1}{R} + \frac{t^2 (x + f y)}{k^2 + t^2 (x^2 + y^2)}\right]. \qquad (z')$$

Enfin, d'après la formule (v), le plan mené par le point M, et qui détermine sur la surface S' la section PQ perpendiculaire à $u'v'$, a pour équation :

$$X^2 + Y^2 - \frac{k^2 + t^2 x(^2 + y^2)}{t^2 (x - f^{-1} y)} (X - f^{-1} Y) = - k^2 T^{-2},$$

et si j'applique la formule (w) à l'arc O'Q passant par O' et perpendiculaire à PQ, il vient :

$$x' = \pm \frac{k^2}{\rho\sqrt{\frac{1}{f^2} + 1}} \left[\frac{\Theta^2 (A - f^{-1} B)}{k^2 + \Theta^2 (A^2 + B^2)} - \frac{t^2 (x - f^{-1} y)}{k^2 + t^2 (x^2 + y^2)}\right]$$

ou

$$x' = \pm \frac{k^2}{\rho\sqrt{f^2 + 1}} \left[\frac{\Theta^2 (A f - B)}{k^2 + \Theta^2 (A^2 + B^2)} - \frac{t^2 (f x + y)}{k^2 + t^2 (x^2 + y^2)}\right]. \qquad (z'')$$

Dans les formules (z), (z'), (z''), les constantes α, β, γ, R, f et ρ sont liées entre elles par les relations :

$$A^2 + B^2 = k^2\,\Theta^{-2}\left(\frac{\Theta}{\rho} - 1\right),$$

$$A^2 + B^2 + R\,A + f\,R\,B = -k^2\,\Theta^{-2},$$

que fournissent les deux équations de l'arc $u'\,v'$.

Ces formules ont été établies en supposant à l'équation de la nouvelle surface de comparaison la forme particulière : $X^2 + Y^2 = k^2\,T^{-2}\left(\frac{T}{\rho} - 1\right)$. Dans le cas le plus général, cette équation sera de la forme :

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 = k^2\,T^{-2}\left(\frac{T}{\rho} - 1\right).$$

L'équation du plan qui contient la section $u'v'$, sera de la forme :

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + R\,(X - x_0) + f\,R\,(Y - y_0) = -k^2\,T^{-2},$$

et les formules de transformation dans le cas général se déduiront, d'après la remarque du n° 60, des formules précédentes en y remplaçant x, y, α, β, x', y' par $x - x_0$, $y - y_0$, $\alpha - x_0$, $k - y_0$, $x' - x_0$, $y' - y_0$.

Les formules (z), (z'), (z''), résolues par rapport à x, y, t, conservent une forme semblable.

69. Pour suivre la même marche que dans le chapitre précédent, on a maintenant à vérifier si la transformation de coordonnées ne peut pas altérer la longueur des éléments linéaires, lorsque le paramètre k est supposé fini.

La longueur d'un élément infinitésimal se tire de la formule $ds^2 = (dx^2 + dy^2)\,t^2 + k^2\,\frac{dt^2}{t^2}$ (n° 51). Après la transformation, elle se tirera de la formule $ds'^2 = (dx'^2 + dy'^2)\,t'^2 + k^2\,\frac{dt'^2}{t'^2}$; il s'agit donc de constater si l'on a toujours :

$$(dx'^2 + dy'^2)\,t'^2 + k^2\,\frac{dt'^2}{t'^2} = (dx^2 + dy^2)\,t^2 + k^2\,\frac{dt^2}{t^2}\,.$$

Si cette égalité est une conséquence des formules (z), (z'), (z''), elle sera aussi une conséquence des formules générales qui se déduisent de celles-ci, lorsqu'on y remplace x, y, x', y' par $x - x_0$, $y - y_0$, $x' - x_0$, $y' - y_0$, et α, β par $\alpha - x_0$, $\beta - y_0$; car cette substitution ne modifie pas les différentielles dx, dy, dx', dy'. Il suffit donc de constater que cette égalité résulte des formules (z), (z'), (z'') pour démontrer qu'elle est générale.

Ces formules peuvent s'écrire, les lettres c et c' désignant des constantes :

$$x' + c = \frac{k^2}{\rho\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{t^2(fx - y)}{k^2 + t^2(x^2+y^2)}, \qquad (1)$$

$$y' + c' = \frac{k^2}{\rho\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{t\,(x + fy)}{k^2 + t^2(x^2+y^2)}, \qquad (2)$$

$$t' = \frac{\rho}{k^2} \cdot \frac{k^2 + t^2(x^2+y^2)}{t}. \qquad (3)$$

En comparant les deux premières égalités à la troisième, on obtient les deux suivantes :

$$x' + c = \frac{t}{t'}\,\frac{fx - y}{\sqrt{f^2+1}},$$

$$y' + c' = \frac{t}{t'}\,\frac{x + fy}{\sqrt{f^2+1}}.$$

En différentiant ces deux égalités et en multipliant après la différentiation les deux membres de chacune par t', on a :

$$t'\,dx' = \frac{(fx - y)\,(t'\,dt - t\,dt') + tt'\,(f\,dx - dy)}{t'\sqrt{f^2+1}},$$

et

$$t'\,dy' = \frac{(x + fy)\,(t'\,dt - t\,dt') + tt'\,(dx + f\,dy)}{t'\sqrt{f^2+1}}.$$

Si l'on substitue ces expressions à $t'\,dx'$ et à $t'\,dy'$ dans le

premier membre de l'égalité à vérifier, et qu'on y remplace $\frac{dt'}{t'}$ par sa valeur déduite de l'équation (3), il vient, toute réduction faite (voir le développ. des calculs, tableau J) :

$$t'^2\,(dx'^2 + dy'^2) + k^2\,\frac{dt'^2}{t'^2} = t^2(dx^2 + dy^2) + k^2\,\frac{dt^2}{t^2}\,,$$

ou $ds'^2 = ds^2$.

D'où il suit qu'une transformation de coordonnées ne peut changer la valeur des éléments linéaires. D'ailleurs la mesure des angles, celle des superficies planes ou courbes, celle des volumes (chap. compl. nos XI, XVI et XVIII), et par suite aussi celle de toutes les grandeurs qu'on peut avoir à considérer dans une figure, se ramène à la mesure d'éléments linéaires. Quelles que soient donc les grandeurs qu'on puisse avoir à considérer, le calcul analytique leur assignera toujours la même valeur après une transformation quelconque de coordonnées qu'avant, et les résultats resteront toujours indépendants du système de comparaison, quelque hypothèse qu'on fasse sur le paramètre absolu k.

70. *Conclusion.*

Ainsi qu'il a déjà été dit dans le chapitre II, au n° 36, des axiomes qui sont toujours vérifiés, soit en eux-mêmes, soit dans toutes leurs applications, par les formules paramétrales, quelque valeur qu'on suppose au paramètre, ne peuvent suffire à établir la théorie des parallèles telle qu'elle nous est connue.

Les formules étant nécessairement soumises aux axiomes généraux d'analyse, il n'y a lieu de considérer que les axiomes particuliers à la géométrie, lesquels, si l'on en excepte le postulatum, ainsi que tout nouvel axiome par lequel on le remplacerait, peuvent tous être tirés (v. chap. compl. nos I et suivants) des trois propositions déjà énoncées au n° 36 :

1° Soit dans une figure invariable, un point P et une droite L passant par ce point; la figure peut être transportée d'un lieu de l'espace dans un autre, de manière que le point P coïncide avec un point P' quelconque fixe dans l'espace, et que la droite

L s'applique exactement sur une droite L', quelle qu'elle soit, menée par le point P'. En outre, si la figure ne se réduit pas à la seule droite L, elle pourra changer de lieu dans l'espace, en tournant autour de deux points fixes pris sur cette ligne, et ce mouvement de rotation pourra être continué indéfiniment.

2° Par deux points on ne peut faire passer qu'une seule ligne droite.

3° Le lieu des points, dont les distances à deux points fixes sont constantes, est une courbe fermée unique, en dehors de laquelle aucun point de l'espace ne fait partie du lieu.

Je constaterai d'abord que les deux derniers de ces trois principes sont toujours vérifiés par les formules.

La ligne déterminée analytiquement par la condition d'être le plus court chemin d'un point à un autre, est unique dans un système de comparaison donné. Si l'on change ce système, la transformation de coordonnées n'altérant la mesure d'aucun élément, la même ligne continuera, d'après son équation, à jouir de la même propriété, et sera la seule qui puisse en jouir, à quelque système qu'elle soit rapportée. Le deuxième principe est donc vérifié par les formules.

Je passe maintenant au troisième principe, et je fais remarquer que, s'il est vérifié dans un système particulier de comparaison, il le sera (n° 69) dans un système quelconque.

Je supposerai les deux points fixes situés sur la normale menée par l'origine à la surface de comparaison. Le lieu étant l'intersection de deux sphères, pourra être représenté par deux équations de la forme des suivantes :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = -\dfrac{k^2}{t^2}\left(\dfrac{t}{\rho}-1\right)\left(\dfrac{t}{\rho'}-1\right), \\ x^2+y^2 = -\dfrac{k^2}{t^2}\left(\dfrac{t}{\rho_1}-1\right)\left(\dfrac{t}{\rho'_1}-1\right), \end{cases}$$

desquelles on tire :

$$\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{\rho'_1}-\frac{1}{t}\right).$$

En effectuant les produits et retranchant le terme $\frac{1}{t^2}$ com-

mun aux deux membres, il reste pour déterminer $\frac{1}{t}$ une équation du premier degré. Donc t n'est susceptible que d'une seule valeur; si je le suppose égal à 1 pour un point de l'intersection, c'est-à-dire si je suppose ce point sur la surface de comparaison, t sera égal à 1 pour tous les points, et l'intersection sera toute entière située sur cette même surface de comparaison. Son équation sera de la forme:

$$x^2 + y^2 = \text{constante}.$$

Elle se discuterait, comme l'équation du cercle, en coordonnées rectilignes rectangulaires; elle représente donc une courbe fermée unique, et ne peut être satisfaite par les coordonnées d'aucun point isolé. Les formules vérifient donc le troisième principe.

Il ne reste plus maintenant qu'à s'assurer si les mêmes formules vérifient aussi, dans toutes ses applications, le premier principe énoncé. Cet examen nécessite quelques développements qui ont déjà été exposés une première fois (n° 36), mais que je crois bon de reproduire ici:

Il n'y a lieu de faire usage du premier principe dans une démonstration géométrique, qu'au seul cas où, ayant deux figures à considérer, on déplace l'une d'elles pour changer sa position relativement à l'autre (les deux figures peuvent quelquefois coïncider l'une avec l'autre et n'en faire qu'une seule, qu'on dédouble par la pensée). Je peux toujours introduire dans la démonstration, sans la modifier en rien, la considération d'un système de comparaison auquel je rapporte les deux figures pour fixer leur position relative, et supposer que l'une des figures, lorsqu'on la déplace, entraîne avec elle le système de comparaison dans une position différente de la première. Ce n'est qu'après ce déplacement qu'on peut tirer quelque conséquence du premier principe, en comparant les éléments des deux figures dans leur nouvelle position. Jusque-là le raisonnement, qui ne s'est appuyé que sur les deux autres principes, a pu être reproduit directement sur les formules. Mais le déplacement une fois effectué, les expressions analytiques des divers éléments dans les deux

figures, se rapportant à deux systèmes différents, ne sont pas comparables ; pour les rendre telles, il faut ramener à sa position première le système de comparaison auquel est rapportée la figure qui a changé de lieu dans l'espace, et effectuer, sur les formules relatives à cette figure, une transformation de coordonnées. On introduira ainsi des constantes dont la valeur se déterminera par les conditions qui définissent la nouvelle position de la figure déplacée. Alors, au lieu de s'appuyer sur le premier principe, comme on le ferait dans la démonstration géométrique, pour établir quelque relation entre les éléments des deux figures, on pourra s'appuyer sur ce principe déjà démontré, et qui a ici le même sens, que la transformation des coordonnées n'a altéré l'expression d'aucun élément. A un tour de raisonnement géométrique, on substituera ainsi un artifice de calcul équivalent, qui conduira identiquement aux mêmes résultats. On reconnaîtra, par un raisonnement analogue à celui du n° 39, que cet artifice est toujours praticable.

En résumé, l'emploi des trois principes que j'ai énoncés ne donnera jamais que des résultats qu'on peut tirer directement des formules, par de simples opérations de calcul. Or, d'une part, ces trois principes, comprenant en eux-mêmes tous les axiomes géométriques autres que le postulatum, peuvent leur être substitués ; d'autre part, on sait déjà qu'on ne peut tirer des formules paramétrales seules aucune démonstration du postulatum d'Euclide. De là cette conclusion que :

Le postulatum d'Euclide n'est pas une conséquence des autres axiomes de la géométrie.

CHAPITRE IV.

Des lignes trigonométriques; relations trigonométriques dans les figures infinitésimales; trigonométrie sphérique. — Mesures de la circonférence, du cercle, du secteur de cercle, du triangle dans la géométrie imaginaire. — Trigonométrie imaginaire. — Mesures de la surface et du volume de la sphère. — Formules diverses de géométrie analytique imaginaire à deux et à trois dimensions. — Des applications que la géométrie imaginaire est susceptible de recevoir. — Remarque au sujet de l'évidence du postulatum d'Euclide.

Des lignes trigonométriques; relations trigonométriques dans les figures infinitésimales; trigonométrie sphérique.

71. Soit une droite O M quelconque (fig. 36, pl. V) menée par le point O origine des abscisses, et soit O P la tangente en ce point à l'arc de comparison $u\,v$. D'un point A pris sur O M, j'abaisse A B perpendiculaire sur O P, et A B′ normale à $u\,v$. Je mène la corde O B′; si le point A se rapproche indéfiniment du point O, l'angle B O B′ tend vers zéro (chap. compl. n° IX); en même temps l'angle A B′ O s'approche indéfiniment d'un angle droit. Ainsi, dans les triangles O A B, O A B′, les angles en O ont une même limite; il en est de même des angles A B O, A B′ O, et par conséquent aussi des angles en A (n° 1); les deux triangles ont d'ailleurs le côté O A commun; les rapports $\frac{AB}{AB'}$ et $\frac{OB'}{OB}$,

ou, en remplaçant la corde par l'arc, $\frac{OB}{\text{arc } OB'}$, ont donc pour limite l'unité (n° 10). D'ailleurs, les limites des rapports entre les longueurs AB', arc OB', OA peuvent être exprimées au moyen des formules paramétrales déjà établies; en faisant ce calcul qui n'offre aucune difficulté, on reconnaît que ces limites ont une valeur déterminée; il en sera donc de même des limites des rapports entre AB, OB et OA.

Cela posé, j'appelle sinus, tangente, sécante de l'angle POM les limites des rapports $\frac{AB}{OA}$, $\frac{AB}{OB}$, $\frac{OA}{OB}$; cosinus, cotangente, cosécante du même angle, le sinus, la tangente, la sécante de son complément.

J'ai supposé que les rapports entre les lignes AB, OB, OA pouvaient varier avec la longueur OA. Lorsqu'on admet l'existence de figures semblables, laquelle est une conséquence de la théorie des parallèles, on reconnaît que ces rapports sont constants; donc, dans ce cas, il est indifférent d'en supposer les termes finis ou infiniment petits, et les définitions précédentes conservent aux lignes trigonométriques leur sens ordinaire, tel qu'on a coutume de le définir indépendamment des dimensions de la figure.

72. Je ferai remarquer que les propositions de géométrie desquelles se déduisent toutes les formules trigonométriques se résument dans les propriétés de similitude, et dans le théorème du carré de l'hypoténuse, qui, lui-même, comme on le sait, en est une conséquence. Or, ces propriétés subsistent encore pour les figures infinitésimales lorsqu'on renonce à s'appuyer sur la théorie des parallèles (voir le chap. Ier); par conséquent, les relations qui lient entre elles les lignes trigonométriques d'un même angle, ainsi que les séries qui expriment ces lignes en fonction de l'angle, et, par suite, les tables trigonométriques subsistent les mêmes, qu'on admette ou non l'existence de figures semblables. Par la même raison, les relations qui lient entre eux les divers éléments d'une figure quelconque dans la

première de ces deux hypothèses, subsistent dans la seconde entre les éléments d'une figure infinitésimale, et l'on peut à une telle figure appliquer sans modification les formules connues qui servent à la résolution des triangles rectilignes.

73. Il en résulte que les formules de trigonométrie sphérique sont indépendantes de la théorie des parallèles. En effet, ces formules, exprimant uniquement des relations entre les six éléments d'un angle trièdre, sont indépendantes du rayon de la sphère (chap. compl. n° V). Or, sur une sphère de rayon infiniment petit, on pourra répéter toutes les constructions au moyen desquelles ces formules sont habituellement établies; les triangles rectilignes que l'on introduit étant alors infiniment petits, les relations, qui lient entre eux leurs divers éléments, seront les mêmes qu'on s'appuie ou non sur la théorie des parallèles; les formules de la trigonométrie sphérique, qui toutes s'en déduisent, sont donc aussi les mêmes dans une hypothèse que dans l'autre.

Mesures de la circonférence, du cercle, du secteur de cercle, du triangle, de la surface et du volume de la sphère, dans la géométrie imaginaire(1).

74. Je place ici un lemme de géométrie imaginaire, que j'appliquerai, dès le numéro suivant, à la détermination de la mesure de la circonférence. La démonstration n'en présentant aucune difficulté, je me borne à en donner l'énoncé :

Par un point quelconque, on peut mener deux arcs de rayon infini normaux à une même droite, ces arcs, symétriques par rapport à la perpendiculaire abaissée du point sur la droite, ont même longueur. En outre, si le point est infiniment voisin de la droite, l'angle que forme en ce point la normale à l'un des arcs, avec le prolongement de la normale à l'autre arc, est infiniment petit.

(1) Lobatschewsky a donné le nom de Géométrie imaginaire à la géométrie qui résulterait d'une hypothèse contraire au postulatum d'Euclide; je conserverai cette dénomination.

75. *Mesure de la circonférence.*

Soit O (fig. 37, pl. V) le centre d'une circonférence de rayon R. Je mène dans le plan de la circonférence une droite MN infiniment voisine du point O. De ce point, j'abaisse les deux arcs de rayon infini OP, OQ normaux à MN; ces arcs seront égaux (n° 74). A partir du point O, je mène les normales OA et OB, respectivement dirigées du côté de la concavité de chacun des deux arcs OP, OQ. Soit OA' le prolongement de OA; l'angle A'OB est infiniment petit (n° 74).

A partir du point O, sur OA', je prends une longueur OC égale à R, et par le point C, je mène l'arc CS parallèle à OP et compris entre les mêmes normales; cet arc coupera OB en un point L, par lequel je mène l'arc LT parallèle à OQ, et égal à LS (n° 74). J'ai, d'après la formule (*a*), établie au n° 20 :

$$\frac{CS}{OP} = e^{\frac{R}{k}} \quad \text{et} \quad \frac{LT}{OQ} = e^{\frac{-OL}{k}}.$$

Je remplace dans la seconde égalité les longueurs LT et OQ par leurs égales LS et OP; il vient

$$\frac{LS}{OP} = e^{-\frac{OL}{k}}.$$

Je retranche cette nouvelle égalité de la première, ce qui donne :

$$\frac{\text{arc } CL}{OP} = e^{\frac{R}{k}} - e^{-\frac{OL}{k}};$$

Quand OP tend vers zéro, OL tend vers R; on a donc :

$$\lim. \frac{\text{arc } CL}{OP} = e^{\frac{R}{k}} - e^{-\frac{R}{k}}. \qquad (1)$$

Soit CD l'arc de circonférence compris dans l'angle A'OB. Cet angle étant infiniment petit, les arcs CL et CD le sont aussi, et ont entre eux, à la limite, même rapport que leurs cordes. Ces cordes devenant toutes deux, à la limite, perpendiculaires sur AA', forment avec LD un triangle dans lequel

l'angle en C tend vers zéro, les deux autres angles étant finis On a donc (n° 5, coroll. I) $\lim. \frac{\text{corde CL}}{\text{corde CD}} = 1$, et, par suite, $\lim. \frac{\text{arc CD}}{\text{arc CL}} = 1$. De cette dernière égalité et de l'égalité (1), on tire la suivante :

$$\lim. \frac{\text{arc CD}}{\text{OP}} = e^{\frac{R}{k}} - e^{-\frac{R}{k}} . \qquad (2)$$

Ainsi, quand le rayon R varie, l'arc infiniment petit CD varie proportionnellement à la différence $e^{\frac{R}{k}} - e^{-\frac{R}{k}}$; mais les arcs compris dans un même angle au centre sont proportionnels aux circonférences entières ; on a donc en désignant par R' le rayon d'une seconde circonférence :

$$\frac{\text{circ. R}}{e^{\frac{R}{k}} - e^{\frac{-R}{k}}} = \frac{\text{circ. R}'}{e^{\frac{R'}{k}} - e^{\frac{-R'}{k}}} . \qquad (3)$$

Si l'on suppose R' infiniment petit, le second membre se réduit à $k \frac{\text{cir. R}'}{2\,\text{R}'}$. Je désignerai par la lettre π le rapport d'une circonférence infiniment petite à son diamètre (1) ; le second membre de l'égalité (3) se réduit alors à πk, et l'on a :

$$\text{circ. R} = \pi k \left(e^{\frac{R}{k}} - e^{-\frac{R}{k}} \right) . \qquad (4)$$

Remarque. Prenant pour unité d'angle l'angle au centre d'une circonférence infinitésimale qui comprend entre ses côtés un arc égal au rayon, on a :

$$\frac{\text{angle BOA}'}{2\,\pi} = \frac{\text{arc CD}}{\text{circ. R}} ;$$

lorsque les arcs OP et CD sont infiniment petits, on peut, ainsi qu'on le reconnaît d'après les égalités (2) et (4), substituer au

(1) Ainsi défini, le nombre π a la même valeur en géométrie imaginaire qu'en géométrie vraie (voir le n° 72).

rapport $\frac{\text{arc C D}}{\text{circ. R}}$ le rapport $\frac{\text{O P}}{\pi k}$; on a donc dans ce cas, à la limite, $\frac{\text{angle B O A}'}{2\pi} = \frac{\text{O P}}{\pi k}$, ou

$$\text{angle B O A}' = \frac{2\,\text{O P}}{k}.$$

76. *Aire du cercle.*

En décomposant la surface du cercle en éléments infiniment petits par des circonférences concentriques, on a de suite (v. chap. compl. n° XIII) la formule :

$$\text{cercle R} = \int_0^{\text{R}} \text{circ. R}\, d\text{R} = \pi k \int_0^{\text{R}} \left(e^{\frac{\text{R}}{k}} - e^{-\frac{\text{R}}{k}}\right) d\text{R},$$

d'où :

$$\text{cercle R} = \pi k^2 \left(e^{\frac{\text{R}}{k}} + e^{-\frac{\text{R}}{k}} - 2\right).$$

77. *Aire d'un secteur de cercle.*

Soit R le rayon d'une circonférence, a la longueur d'un arc, S l'aire du secteur compris entre cet arc et les rayons aboutissant à ses extrémités. On a $\frac{a}{\text{circ. R}} = \frac{\text{S}}{\text{cercle R}}$; d'où :

$$\text{S} = a\,\frac{\text{cercle R}}{\text{circ. R}} = a\,k\,\frac{e^{\frac{\text{R}}{k}} + e^{-\frac{\text{R}}{k}} - 2}{e^{\frac{\text{R}}{k}} - e^{-\frac{\text{R}}{k}}}.$$

Si le rayon est infini, l'expression de S se réduit à $a\,k$. Donc l'aire d'un secteur de rayon infini compris entre les normales menées par les deux extrémités d'un arc de longueur finie est elle-même finie et déterminée.

78. Je me reporte à la construction décrite au n° 75 (fig. 37, pl. V). D'après ce qui vient d'être démontré, l'aire de chacun des secteurs A O P M, B O Q N sera égale à $k \times$ O P.

La somme de ces deux secteurs, égale à $2k \times OP$, se compose de l'aire comprise entre les droites OA, OB et MN plus de l'aire OPQ. Or, l'aire OPQ est moindre que celle du triangle Opq construit en menant par le point O des tangentes aux deux arcs OP et OQ. Lorsque le point O est infiniment voisin de MN, ce triangle, dont les trois côtés sont infiniment petits, a pour mesure (chap. compl. n° XII) la moitié du produit de sa base pq par sa hauteur. La hauteur est de même ordre de grandeur que OP; la base pq, opposée à un angle infiniment petit, est d'un ordre supérieur; l'aire du triangle, et à plus forte raison l'aire OPQ, est donc négligeable auprès de l'aire $2k \times OP$. Donc, lorsque le point O est infiniment voisin de MN, l'aire comprise entre les droites OA, OB et MN peut être représentée par l'expression $2k \times OP$, ou, d'après l'égalité angle $BOA' = \frac{2OP}{k}$ (n° 75, remarque), par l'expression $k^2 \times$ angle BOA'.

79. Soit AB (fig. 38, pl. V) un arc de rayon infini, et soient AL et BM les normales aux deux extrémités de cet arc, que je supposerai prolongées indéfiniment du côté de la concavité. J'appellerai S l'aire du secteur LABM. Je mène un arc ab parallèle à AB et compris entre les mêmes normales; soit s l'aire du secteur LabM. L'arc ab, auquel cette aire est proportionnelle (n° 77), pourra être mené à une distance de AB assez grande pour que s soit moindre qu'une aire donnée σ, quelque petite qu'elle soit. Soit sur aL un point P quelconque que je joins par une ligne droite au point B, et soit c l'intersection de cette droite avec l'arc ab. Le point P pourra être pris assez éloigné sur la droite indéfinie aL pour que l'aire de la figure Bbc, dans laquelle l'angle en B tend vers zéro (n°s 16 et 17), soit plus petite qu'un aire donnée quelconque σ'. Or l'aire PAB diffère de S d'une quantité plus petite que $s +$ aire Bbc, et à plus forte raison plus petite que $\sigma + \sigma'$; mais la somme $\sigma + \sigma'$ peut devenir plus petite que toute quantité donnée; donc l'aire PAB a pour limite S.

Si du point B j'abaisse BH perpendiculaire sur la droite AL, si je construis la droite BN symétrique de BM par rapport à cette perpendiculaire, et que je prolonge LA indéfiniment suivant AL', il est facile de conclure de ce qui précède que l'aire d'un triangle dont la hauteur est HB, et dont les deux angles à la base tendent vers zéro, a pour limite l'aire comprise entre les droites LL', BM et BN. Il en est de même si la hauteur du triangle varie en tendant vers une limite égale à HB, en même temps que les angles à la base tendent vers zéro; dans ce cas, comme dans le précédent, l'angle au sommet a pour limite l'angle MBN. Si la hauteur du triangle a une limite plus grande ou plus petite que HB, l'aire du triangle aura aussi une limite plus grande ou plus petite que l'aire comprise entre les droites LL', BM et BN.

80. *Aire du triangle.*

Legendre a indiqué, dans ses *Eléments de Géométrie* (livre Ier, prop. XIX) une construction par laquelle on peut former une suite indéfinie de triangles ayant même somme d'angles U et même surface T qu'un triangle donné quelconque. Dans ces triangles, deux angles tendent vers zéro, et par conséquent, le troisième a pour limite U. Si la hauteur abaissée du sommet de ce dernier angle sur le côté opposé tend vers zéro, on est en droit de conclure avec Legendre que la somme U est égale à deux angles droits, d'où résulte toute la théorie des parallèles; mais dans l'hypothèse de la géométrie imaginaire, cette hauteur a une limite finie que je désignerai par h.

La figure du numéro précédent (fig. 38, pl. V) peut être construite en partant de la longueur HB, comptée sur une perpendiculaire à LL' à partir de son pied, et que je supposerai ici égale à h. D'après les conclusions de ce même numéro, l'aire T est égale à l'aire comprise entre les droites LL', BM et BN et l'angle U est égal à l'angle MBN. De plus, la hauteur h ne changera pas si au triangle proposé on en substitue un autre quelconque équivalent; car si cette hauteur venait à changer,

l'aire deviendrait ou plus grande ou plus petite que T. Donc aussi l'angle U restera le même; ce qui démontre que deux triangles équivalents ont même somme d'angles.

Réciproquement, deux triangles qui ont une même somme d'angles U sont équivalents. En effet, je pourrai construire la même figure en partant de l'angle MBN, que je ferai égal à U, menant par le sommet B les arcs de rayon infini BA et BA' normaux aux deux côtés de cet angle, et traçant la droite LL' normale aux deux arcs. Ces arcs n'ont qu'une normale commune (n° 33); donc l'angle MBN étant donné égal à U, la hauteur BH ne peut avoir qu'une seule valeur. Il en résulte que l'aire d'un triangle est déterminée par la somme de ses angles, et que si dans deux triangles cette somme est la même, les deux triangles sont équivalents.

Cela posé, soient deux triangles dont je désignerai les surfaces par T et T'; soit $\pi - \varepsilon$ la somme des angles du premier, $\pi - \varepsilon'$ la somme des angles du second, et soit $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{m}{m'}$, m et m' étant deux nombres entiers.

Je divise le triangle T en m triangles équivalents par des droites issues d'un même sommet. La somme des angles de ces m triangles sera $\pi - \varepsilon + (m-1)\pi$ ou $m\pi - \varepsilon$; les triangles, étant équivalents, ont tous une même somme d'angles, qui sera égale, par conséquent, à $\pi - \frac{\varepsilon}{m}$.

Je divise de même le triangle T' en m' triangles équivalents, dans chacun desquels la somme des angles sera $\pi - \frac{\varepsilon'}{m'}$; par hypothèse on a $\frac{\varepsilon}{m} = \frac{\varepsilon'}{m'}$; donc les triangles partiels dont se composent les aires T et T' ont tous même somme d'angles, et par suite sont équivalents entre eux. L'aire T contient m de ces triangles; l'aire T' en contient m'; on a donc $\frac{T}{T'} = \frac{m}{m'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$.

Cette égalité, démontrée ici dans le cas où ε et ε' ont une commune mesure, se démontrerait ensuite sans aucune difficulté,

dans le cas où ε et ε' sont incommensurables. On a donc, en général, λ désignant une constante,

$$T = \lambda \varepsilon ;$$

c'est-à-dire que l'aire d'un triangle est proportionnelle au supplément de la somme de ses angles.

Pour déterminer λ, je me reporte à la figure sur laquelle j'ai établi, au commencement de ce numéro, l'équivalence des triangles qui ont même somme d'angles (fig. 38. pl. V). Soit BM' le prolongement de M B. Si je suppose le point B infiniment voisin de LL', l'aire comprise entre L L', B M et B N, et, par conséquent, celle de tout triangle dont la somme des angles serait égale à M B N ou π — N B M', a pour expression (n° 78), $k^2 \times$ angle N B M'; mais elle a aussi pour expression $\lambda \times$ angle N B M'; donc on a $\lambda = k^2$, d'où la formule générale qui donne la mesure d'un triangle, en fonction de ses trois angles A, B, C :

$$T = k^2 \varepsilon = k^2 (\pi - A - B - C).$$

Trigonométrie imaginaire.

81. *Formules générales de trigonométrie rectiligne.*

Soit un triangle A B C quelconque (fig. 39, pl. V); je désignerai par a, b, c les côtés opposés aux angles A, B, C, et par α, β, γ les exponentielles $e^{\frac{a}{k}}, e^{\frac{b}{k}}, e^{\frac{c}{k}}$. Je donne au côté b un accroissement infiniment petit db représenté sur la figure par C C', et je mène la droite B C'. L'angle A et le côté c restant constants, les autres éléments du triangle sont des fonctions de b, et si du point B comme centre, avec a pour rayon, je décris l'arc CD compris dans l'angle C B C', j'ai :

$$C'D = da ; \qquad \text{angle } CBC' = dB,$$

et angle B C A — angle B C' A $= - dC$.

L'aire du triangle B C C' aura donc pour expression

$-k^2(dC + dB)$. Celle du secteur CBD est $\frac{dB}{2\pi}$ cercle a, ou $k^2\left(\alpha + \alpha^{-1} - 2\right)\frac{dB}{2}$. Le rapport de ces deux aires tend vers un quand CC′ tend vers zéro (1) ; on a donc :

$$dC + dB = -(\alpha + \alpha^{-1} - 2)\frac{dB}{2},$$

d'où

$$\frac{dB}{2} = -\frac{dC}{\alpha + \alpha^{-1}}. \qquad (1)$$

D'un autre côté, l'arc CD étant infiniment petit, il existe entre les longueurs CC′, CD, C′D les mêmes relations qu'entre les trois côtés d'un triangle rectangle infinitésimal ; on a donc, en remplaçant l'angle C′ par l'angle C dont il diffère infiniment peu :

$$\sin C = \frac{CD}{CC'}\ ;\ \cos C = \frac{C'D}{CC'}\ ;\ tg\ C = \frac{CD}{C'D}.$$

D'ailleurs $CD = \frac{dB}{2\pi}$ circ. $a = k\,(\alpha - \alpha^{-1})\,\frac{dB}{2}$; de plus $CC' = db = k\frac{d\beta}{\beta}$, et $C'D = da = \frac{k\,d\alpha}{\alpha}$. On a donc :

$$\sin C = (\alpha - \alpha^{-1})\,\frac{\beta\,dB}{2\,d\beta}, \qquad (2)$$

$$\cos. C = \frac{\beta\,d\alpha}{\alpha\,d\beta}, \qquad (3)$$

$$\text{et } tg\ C = \frac{(\alpha - \alpha^{-1})\,\alpha\,dB}{2\,d\alpha}. \qquad (4)$$

(1) En effet, la différence entre l'aire BCC′ et l'aire CBD est égale à l'aire du triangle CDC′ formé en menant la corde CD, moins l'aire comprise entre l'arc CD et sa corde ; or, l'aire du triangle infinitésimal CDC′, dont la base est DC′ et à la hauteur duquel on peut substituer l'arc CD, a pour mesure (ch. compl. n° XII) DC′ × CD, ou $da\,\frac{dB}{2\pi}$ circ. a. Cette aire est négligeable auprès de l'aire CBD égale à $\frac{dB}{2\pi}$ cercle a. Donc aussi la différence entre les aires BCC′ et CBD est négligeable auprès de chacune d'elles.

Les équations (1), (2), (3), (4), dont la dernière est une conséquence des deux qui la précèdent, renferment implicitement toutes les formules nécessaires pour la résolution des triangles rectilignes.

1° Relation entre deux côtés et les deux angles opposés.

L'élimination de dB entre les équations (1) et (4) donne :

$$\frac{d\,C}{tg\,C} = -\frac{(1+\alpha^{-2})\,d\alpha}{\alpha-\alpha^{-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{d\,\sin C}{\sin C} = -\frac{d\,(\alpha-\alpha^{-1})}{\alpha-\alpha^{-1}}.$$

Intégrant le premier membre de $\pi - A$ à C, et le second de γ à α, on a $l.\,\dfrac{\sin C}{\sin A} = l.\,\dfrac{\gamma-\gamma^{-1}}{\alpha-\alpha^{-1}}$, ou

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\gamma-\gamma^{-1}}{\alpha-\alpha^{-1}}, \qquad (5)$$

formule qui peut s'écrire aussi $\dfrac{\sin C}{\sin A} = \dfrac{\text{circ. } c}{\text{circ. } a}$.

2° Relation entre trois côtés et un angle.

Eliminant C entre les équations (3) et (5), on a

$$\frac{\beta\,d\alpha}{\alpha\,d\beta} = \frac{\sqrt{(\alpha-\alpha^{-1})^2-(\gamma-\gamma^{-1})^2\sin^2 A}}{\alpha-\alpha^{-1}},$$

d'où l'on tire $\dfrac{d\beta}{\beta} = \dfrac{(1-\alpha^{-2})\,d\alpha}{\sqrt{(\alpha-\alpha^{-1})^2-(\gamma-\gamma^{-1})^2\sin^2 A}}$, ou

$$\frac{d\beta}{\beta} = \frac{d\,(\alpha+\alpha^{-1})}{\sqrt{(\alpha+\alpha^{-1})^2-4-(\gamma-\gamma^{-1})^2\sin^2 A}}.$$

J'intègre le premier membre de 1 à β, et le second de γ à α, en remarquant que le radical, qui n'est autre que $(\alpha-\alpha^{-1})\cos C$, devient à la limite inférieure d'intégration $-(\gamma-\gamma^{-1})\cos A$. J'obtiens ainsi après l'intégration, et en remontant des logarithmes aux nombres,

$$\beta = \frac{\alpha+\alpha^{-1}+\sqrt{(\alpha-\alpha^{-1})^2+(\gamma-\gamma^{-1})^2\sin^2 A}}{\gamma+\gamma^{-1}-(\gamma-\gamma^{-1})\cos A}.$$

Résolue par rapport à l'angle A, cette équation prend la forme :

$$-\cos A = \frac{\alpha + \alpha^{-1} - \beta(\gamma + \gamma^{-1}) \pm [\alpha + \alpha^{-1} - \beta^{-1}(\gamma + \gamma^{-1})]}{(\beta - \beta^{-1})(\gamma - \gamma^{-1})}.$$

Le cosinus devant être plus petit que l'unité, la quantité entre crochets au numérateur du second membre ne peut être affectée que du signe $+$, et l'on a

$$-\cos A = \frac{2(\alpha + \alpha^{-1}) - (\beta + \beta^{-1})(\gamma + \gamma^{-1})}{(\beta - \beta^{-1})(\gamma - \gamma^{-1})}, \qquad (6)$$

ou

$$\alpha + \alpha^{-1} = \frac{(\beta + \beta^{-1})(\gamma + \gamma^{-1})}{2} - \frac{(\beta - \beta^{-1})(\gamma - \gamma^{-1})}{2} \cos A.$$

Cette relation est susceptible de prendre une forme plus facile à retenir ; on en tire, en effet,

$$\alpha + \alpha^{-1} - 2 =$$
$$\frac{\beta\gamma + \beta^{-1}\gamma^{-1} - 2 + \beta\gamma^{-1} + \beta^{-1}\gamma - 2}{2} - \frac{\beta\gamma + \beta^{-1}\gamma^{-1} - 2 - \beta\gamma^{-1} - \beta^{-1}\gamma + 2}{2} \cos A,$$

d'où, en multipliant les deux membres par πk^2.

$$\text{cercle } A =$$
$$\frac{\text{cercle}(b + c) + \text{cercle}(b - c)}{2} - \frac{\text{cercle}(b + c) - \text{cercle}(b - c)}{2} \cos A.$$

3° Relation entre deux angles et les deux côtés comprenant l'un de ces angles.

La formule (5) appliquée aux angles B et A donne

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\beta - \beta^{-1}}{\alpha - \alpha^{-1}}.$$

Multipliant membre à membre cette égalité et l'égalité (6), on a

$$-\sin B \cot A = \frac{2(\alpha+\alpha^{-1}) - (\beta+\beta^{-1})(\gamma+\gamma^{-1})}{(\alpha-\alpha^{-1})(\gamma-\gamma^{-1})}.$$

De la formule (6) appliquée à l'angle B, on tire :

$$\beta+\beta^{-1} = \frac{(\alpha+\alpha^{-1})(\gamma+\gamma^{-1})}{2} - \frac{(\alpha-\alpha^{-1})(\gamma-\gamma^{-1})}{2}\cos B.$$

Si l'on reporte cette valeur dans l'équation précédente, il vient, après réduction :

$$-\sin B \cot A = \frac{1}{2}(\gamma+\gamma^{-1})\cos B - \frac{1}{2}\frac{(\gamma-\gamma^{-1})(\alpha+\alpha^{-1})}{\alpha-\alpha^{-1}},$$

ou

$$\frac{2\sin B \cot A}{\gamma+\gamma^{-1}} + \cos B = \frac{\gamma-\gamma^{-1}}{\alpha-\alpha^{-1}} \times \frac{\alpha+\alpha^{-1}}{\gamma+\gamma^{-1}}, \qquad (7)$$

formule qui peut s'écrire aussi :

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin A} = \frac{\text{circ.}(c+a)+\text{circ.}(c-a)}{2\,\text{circ.}\,a} - \frac{\text{cercle}\,c}{2\pi k^2}\cos B.$$

4° Relation entre les trois angles et un côté.

Dans la formule (7), je remplace le rapport $\frac{\gamma-\gamma^{-1}}{\alpha-\alpha^{-1}}$ par le rapport $\frac{\sin C}{\sin A}$ qui lui est égal d'après la formule (5); je remplace dans la même formule $\alpha+\alpha^{-1}$ par sa valeur $-\frac{2\,dC}{dB}$ tirée de l'équation (1). Il vient ainsi l'équation

$$\frac{2\sin B \cot A}{\gamma+\gamma^{-1}} + \cos B = -\frac{\sin C}{\sin A} \times \frac{2\,dC}{(\gamma+\gamma^{-1})\,dB},$$

dans laquelle A et γ sont des constantes, et qui peut s'écrire :

$$2\cos A \sin B\,dB + (\gamma+\gamma^{-1})\sin A \cos B\,dB = -2\sin C\,dC.$$

En intégrant le premier membre de zéro à B, et le second membre de $\pi - A$ à C, on en tire :

$$-2\cos A(\cos B - 1) + (\gamma+\gamma^{-1})\sin A \sin B = 2(\cos C + \cos A),$$

ou

$$\cos A \cos B + \cos C = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \sin A \sin B. \qquad (8)$$

Les formules (5), (6), (7), (8) permettent de calculer trois éléments d'un triangle rectiligne quelconque, lorsque les trois autres sont connus.

Lobatschewsky, dans ses *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, a obtenu, en suivant une marche différente, des formules équivalentes à celles établies dans ce numéro ; elles ne s'en distinguent, quant à la forme, que par la notation particulière qui y a été introduite, et qui en abrège l'écriture.

82. *Modification à apporter aux formules précédentes pour les rendre applicables à un triangle formé par trois sections normales sur la surface dont tous les points sont à égale distance d'un même plan.*

Quand on suppose que la surface de rayon infini n'est pas un plan, il faut admettre l'existence de surfaces autres que le plan ou la sphère, jouissant comme ces dernières de la propriété d'être partout identiques à elles-mêmes. Une quelconque de ces surfaces s'obtiendrait en construisant le lieu géométrique de points également distants d'un même plan. Soit S une de ces surfaces, et h la distance de chacun de ses points à un plan M ; si sur le plan M je trace un triangle quelconque dont les côtés soient a, b, c, et que par chacun de ces côtés je mène un plan perpendiculaire au plan M, les trois plans ainsi construits détermineront sur la surface S, à laquelle ils sont normaux, un triangle curviligne, qui aura les mêmes angles que le triangle rectiligne, et dont les côtés a', b', c' seront avec les côtés a, b, c dans un rapport constant.

Pour déterminer ce rapport, je conçois sur la surface S une ligne A′ B′ (fig. 40, pl. VI), se projetant orthogonalement sur le plan M suivant la droite A B. Soit, sur A′ B′, un point C′ infiniment voisin de A′, et se projetant en C. Au point A, de part et d'autre de A B et tangentiellement à cette droite, je trace dans

le plan A B A′B′ les deux arcs de rayon infini A V et A′V′; par le point C, je mène deux droites normales à ces arcs en des points P et P′, et coupant A′B′ en N et N′. L'arc C′N étant égal à l'arc C′N′, on a $A'C' = \frac{A'N' + A'N}{2}$. Or, A′N étant infiniment petit, on peut, d'après le raisonnement déjà appliqué (n° 75) à un cas analogue, lui substituer l'arc A′Q parallèle à A P mené par A′ et compris entre A A′ et P N, et par conséquent remplacer A′N par $AP \times e^{\frac{h}{k}}$, en désignant par h la hauteur A A′. De même, on peut à A′N′ substituer un arc A′ Q′ parallèle à A P′, et, par suite, remplacer cette longueur par $AP' \times e^{-\frac{h}{k}}$. On a donc, l'arc A P′ étant égal à l'arc A P,

$$A'C' = \frac{AP}{2}\left(e^{\frac{h}{k}} + e^{-\frac{h}{k}}\right).$$

Mais, A P étant infiniment petit, on peut lui substituer A C, d'où l'égalité $\frac{A'C'}{AC} = \frac{e^{\frac{h}{k}} + e^{-\frac{h}{k}}}{2}$. Or, le rapport entre une ligne située sur la surface S et sa projection est constant. Il en résulte qu'entre les côtés des deux triangles considérés sur la surface S et sur le plan M, on a les relations

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{h}{k}} + e^{-\frac{h}{k}}\right).$$

Les formules trigonométriques relatives aux triangles sur la surface S se déduiront donc de celles relatives aux triangles rectilignes en y multipliant chaque côté par $\frac{2}{e^{\frac{h}{k}} + e^{-\frac{h}{k}}}$.

Il a été établi (n° 73) que les formules de trigonométrie sphérique exprimant les relations entre les six éléments d'un angle trièdre sont indépendantes de la théorie des parallèles; il n'en sera plus de même si l'on veut introduire, au lieu des faces

de l'angle trièdre, les côtés du triangle sur la sphère; il sera d'ailleurs facile, en se reportant à la mesure de la circonférence, de déduire les formules qui conviendraient dans ce cas, des formules usuelles de trigonométrie sphérique.

Sur la sphère de rayon infini, la trigonométrie imaginaire ne diffère en rien de la trigonométrie rectiligne vraie (voir le n° 49).

Mesures de la surface et du volume de la sphère.

83. *Surface de la sphère.*

Soit M P N (fig. 41, pl. VI) une demi-circonférence de grand cercle sous-tendue par le diamètre MN. Je décompose la surface sphérique en zônes comprises entre des plans perpendiculaires à MN, et interceptant sur la demi-circonférence M P N des arcs tels que A A', tous égaux à un même arc que je suppose infiniment petit. A A' étant l'un quelconque de ces arcs, j'en joins les extrémités A et A' au centre O. Soit arc M A $= s$; angle M O A $= \alpha$; A A' $= ds$ et angle A O A' $= d\alpha$. Du point A j'abaisse la droite A B perpendiculaire sur MN. A B étant une fonction de s, l'aire d'une zône dont les limites correspondent aux valeurs s_0 et s_1 de s sera :

$$\int_{s_0}^{s_1} \text{circ. } \overline{AB} \times ds$$

Or, dans le triangle rectangle O A B, on a (n° 81), en appelant R le rayon de la sphère : circ. A B $=$ sin α circ. R ; on a d'ailleurs $\dfrac{ds}{\text{circ. R}} = \dfrac{d\alpha}{2\pi}$.

L'aire de la zône sera donc :

$$\frac{(\text{circ. R})^2}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha_1} \sin \alpha \, d\alpha, \text{ ou } \frac{(\text{circ. R})^2}{2\pi} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_1).$$

Si l'on fait, dans cette expression, $\alpha_0 = o$ et $\alpha_1 = \pi$, on aura la surface totale de la sphère. On trouve ainsi :

$$\text{surf. sph. R} = \frac{(\text{circ. R})^2}{\pi} = \pi k^2 \left(e^{\frac{2R}{k}} + e^{-\frac{2R}{k}} - 2 \right),$$

ou surf. sph. R = cercle (2 R).

84. *Volume de la sphère.*

En décomposant le volume de la sphère en éléments infiniment petits par des surfaces sphériques concentriques, on a immédiatement :

$$\text{sph. R} = \int_0^R \text{surf. sph. R} \times d\,\text{R} = \pi k^2 \int_0^R \left(e^{\frac{2R}{k}} + e^{-\frac{2R}{k}} - 2 \right) d\,\text{R}$$

$$= \pi k^2 \left(\frac{k}{2} e^{\frac{2R}{k}} - \frac{k}{2} e^{-\frac{2R}{k}} - 2\,\text{R} \right),$$

ou

$$\text{sph. R} = \frac{\pi k^3}{2} \left(e^{\frac{2R}{k}} - e^{-\frac{2R}{k}} - \frac{4\,\text{R}}{k} \right),$$

formule qui peut aussi s'écrire :

$$\text{sph. R} = \frac{\text{circ. R} \times \text{cercle R}}{2\pi} + k^2 (\text{circ. R} - 2\pi\,\text{R}).$$

Formules diverses de géométrie imaginaire à deux dimensions.

85. *Angle d'une droite avec une normale à l'arc de comparaison.*

Soit $(x - \text{P})(x - \text{Q}) = -k^2 t^{-2}$ l'équation d'une droite. Si l'on pose $\text{P} = \alpha + \text{R}$, et $\text{Q} = \alpha - \text{R}$ (d'où l'on tire $\alpha = \frac{\text{P}+\text{Q}}{2}$, et $\text{R} = \frac{\text{P}-\text{Q}}{2}$), l'équation prend la forme :

$$(x - \alpha)^2 - \text{R}^2 = -k^2 t^{-2}.$$

Soit φ l'angle que cette droite fait du côté des abscisses positives avec la normale à l'arc de comparaison menée par le point dont l'abscisse est x, et dirigée du côté de la convexité; on a

$$tg\ \varphi = \frac{t\,dx}{dz} = \frac{t^2\,dx}{k\,dt}.$$

De l'équation de la droite on tire par différentiation :

$$(x-\alpha)\,dx = \frac{k^2\,dt}{t^3}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{k^2}{t^3\,(x-\alpha)},$$

d'où :

$$tg\ \varphi = \frac{k}{t\,(x-\alpha)}.$$

De l'expression de la tangente on déduit celles du sinus et du cosinus ; on trouve ainsi :

$$\sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{k_2 + t^2\,(x-\alpha)^2}} = \frac{k}{t\sqrt{k^2\,t^{-2} + (x-\alpha)^2}} = \frac{k}{t\,\mathrm{R}},$$

R étant supposé positif, et

$$\cos\varphi = \frac{x-\alpha}{\mathrm{R}}.$$

Si l'équation de la droite est donnée sous la forme $x^2 + \mathrm{M}\,x + \mathrm{N} = -\,k^2 t^{-2}$, on en ramènera le premier membre à la forme $(x-\alpha)^2 - \mathrm{R}^2$ en posant $\mathrm{M} = -\,2\,\alpha$, $\mathrm{N} = \alpha^2 - \mathrm{R}^2$, d'où l'on tire $\alpha = -\,\frac{\mathrm{M}}{2}$ et $\mathrm{R}^2 = \frac{\mathrm{M}^2}{4} - \mathrm{N}$.

86. *Angle de deux droites.*

Soient les équations des deux droites mises sous les formes $(x-\alpha)^2 - \mathrm{R}^2 = -\,k^2\,t^{-2}$ et $(x-\alpha')^2 - \mathrm{R}'^2 = -\,k^2\,t^{-2}$ (je supposerai R et R' positifs). Soient φ et φ' les angles que ces droites font avec la normale à l'arc de comparaison menée par leur point d'intersection, et ω l'angle qu'elles font entre elles ; on a :

$$\cos\omega = \cos(\varphi - \varphi') = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'.$$

On en tire, d'après le numéro précédent, en rapportant les variables x et t au point d'intersection :

$$\cos\omega = \frac{(x-\alpha)(x-\alpha')}{RR'} + \frac{k^2 t^{-2}}{RR'}.$$

Or, en additionnant membre à membre les équations des deux droites, on obtient l'équation suivante :

$$(x-\alpha)^2 + (x-\alpha')^2 - R^2 - R'^2 = -2k^2 t^{-2}.$$

Si l'on remplace, dans l'expression de cos ω, $k^2 t^{-2}$ par sa valeur tirée de cette dernière équation, il vient :

$$\cos\omega = \frac{(x-\alpha)(x-\alpha')}{RR'} + \frac{R^2 + R'^2 - (x-\alpha)^2 - (x-\alpha')^2}{2RR'},$$

ou
$$\cos\omega = \frac{R^2 + R'^2 - (\alpha-\alpha')^2}{2RR'}.$$

La condition, pour que ω soit réel, est que son cosinus soit, en valeur absolue, plus petit que un ; R et R' étant positifs tous deux, pour que cette condition soit remplie, il est nécessaire et suffisant que les deux expressions égales et de signe contraire $R^2 + R'^2 - (\alpha-\alpha')^2$ et $(\alpha-\alpha')^2 - R^2 + R'^2$, soient toutes deux plus petites que $2RR'$. De là la double inégalité $(R-R')^2 < (\alpha-\alpha')^2 < (R+R')^2$; on vérifiera facilement, soit par l'analyse sur les équations, soit par la géométrie sur une figure, que cette double inégalité exprime précisément que les deux droites se rencontrent.

Si ω est égal à un angle droit, on a $\cos\omega = o$, et, par conséquent, $R^2 + R'^2 = (\alpha-\alpha')^2$; telle est l'équation de condition qui exprime que les deux droites sont perpendiculaires.

87. *Tangente à une courbe plane.*

Soient x et z les coordonnées courantes de la courbe, X et Z celles de la tangente ; en exprimant que la tangente passe par le point de contact dont les coordonnées sont x, z, et qu'en ce point on a $\frac{dT}{dX} = \frac{dt}{dx}$, on obtient pour l'équation de la tangente :

$$(X-x)^2 + \frac{2k^2}{t^2}\frac{dt}{dx}(X-x) - k^2 t^{-2} = -k^2 T^{-2}.$$

Soit $f(x, t) = o$ l'équation de la courbe ; celle de la tangente sera :

$$(X - x)^2 - 2 k^2 t^3 \left(\frac{df}{dt}\right)^{-1} \frac{df}{dx} (X - x) - k^2 t^2 = - k^2 T^{-2}.$$

88. *Aire d'une courbe plane.*

Soit un arc infinitésimal parallèle à l'arc de comparaison, et situé à une distance z de celui-ci, distance comptée positivement ou négativement, selon la convention du n° 22 ; soit dx sa projection sur l'arc de comparaison. Je me propose de mesurer l'aire de la surface limitée, d'une part, à l'arc infinitésimal considéré, d'autre part aux normales menées par les deux extrémités de cet arc, et prolongées indéfiniment du côté de la concavité. Je décompose cette aire par des arcs parallèles à l'arc de comparaison, et dont les distances successives sont infiniment petites. L'aire de chacun des éléments superficiels ainsi formés a pour mesure (chap. compl. n° XI) le produit de l'un ou l'autre des deux arcs qui lui servent de bases par sa hauteur. D'après cela, et d'après la formule (a) établie au n° 20, l'aire comprise entre les deux normales et limitée à l'arc considéré a pour mesure :

$$\int_{-\infty}^{z} e^{\frac{z}{k}} dx\, dz, \quad \text{ou } k\, e^{\frac{z}{k}} dx.$$

Il en résulte que, si je désigne par t l'exponentielle $e^{\frac{z}{k}}$, supposée exprimée en fonction de x d'après l'équation d'une courbe, l'aire comprise entre cette courbe et les normales extrêmes prolongées indéfiniment du côté de la concavité, aura pour mesure :

$$k \int_{x_0}^{x_1} t\, dx,$$

x_0 et x_1 désignant les abscisses des deux extrémités de la courbe.

Formules diverses de géométrie imaginaire à trois dimensions.

89. *Angle d'une droite et d'une normale à la surface de comparaison.*

Les équations d'une droite peuvent toujours être mises sous la forme :

$$\begin{cases} y - \beta = m(x - \alpha), \\ (m^2 + 1)[(x - \alpha)^2 - R^2] = -k^2 t^{-2}. \end{cases}$$

Soit φ l'angle que fait la droite représentée par ces deux équations avec la normale à la surface de comparaison menée par le point dont l'abscisse est x et dirigée du côté de la convexité (la droite sera supposée dirigée dans le sens des abscisses croissantes, et R sera supposé positif).

Soit s la longueur comptée sur la projection de la droite, depuis le point dont l'abscisse est α jusqu'au point dont l'abscisse est x. On a

$$s^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x - \alpha)^2 (m^2 + 1).$$

Je remplace dans l'équation entre x et t, la quantité $(x - \alpha)^2 (m^2 + 1)$ par son égale s^2 ; il vient :

$$s^2 - R^2 (m^2 + 1) = -k^2 t^{-2},$$

équation de la droite dans son plan projetant.

Pour le point dont l'abscisse est x, on a $s = (x - \alpha)\sqrt{m^2 + 1}$. En ce point, la normale fait avec la droite, dans son plan projetant, l'angle φ; si l'on applique à cet angle les formules du n° 85, il vient :

$$tg\,\varphi = \frac{k}{ts}\,;\ \sin\varphi = \frac{k}{tR\sqrt{m^2+1}} \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{s}{R\sqrt{m^2+1}}$$

d'où, en remplaçant s par sa valeur :

$$tg\,\varphi = \frac{k}{t(x-\alpha)\sqrt{m^2+1}}\,;\quad \sin\varphi = \frac{k}{t\,\mathrm{R}\sqrt{m^2+1}}\,;$$

$$\cos\varphi = \frac{x-\alpha}{\mathrm{R}}.$$

90. *Angle de deux droites qui se rencontrent.*

Soient deux droites L et L′ se coupant en un point P; soient φ et φ' les angles que ces deux droites font avec la normale abaissée du point P sur la surface de comparaison, A l'angle dièdre formé suivant cette normale par les deux plans projetants, et ω l'angle des deux droites.

On a (n° 73) :

$$\cos\omega = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos\mathrm{A}.$$

Je suppose les équations des deux droites mises sous les formes suivantes :

$$\text{Éq}^{\text{ons}}\text{ de la droite L}\quad \begin{cases} y-\beta = m(x-\alpha)\,, & (1)\\ (m^2+1)\,[(x-\alpha)^2-\mathrm{R}^2] = -k^2t^{-2}; & (2)\end{cases}$$

$$\text{Éq}^{\text{ons}}\text{ de la droite L}'\quad \begin{cases} y-\beta' = m'(x-\alpha')\,, & (3)\\ (m'^2+1)\,[(x-\alpha')^2-\mathrm{R}'^2] = -k^2t^{-2}. & (4)\end{cases}$$

On a, d'après les formules du numéro précédent, en rapportant au point d'intersection des deux droites les valeurs de x et de t :

$$\cos\varphi = \frac{x-\alpha}{\mathrm{R}}\,;\quad \cos\varphi' = \frac{x-\alpha'}{\mathrm{R}'}\,;$$

$$\sin\varphi = \frac{k}{t\,\mathrm{R}\sqrt{m^2+1}}\,;\quad \sin\varphi' = \frac{k}{t\,\mathrm{R}'\sqrt{m'^2+1}}\,.$$

L'angle A est l'angle que font entre elles les projections des droites sur la surface de comparaison. Ces projections sont représentées par les équations (1) et (2). On a donc (n° 49) $tg\,\mathrm{A} = \dfrac{m-m'}{1+mm'}$, d'où l'on tire :

$$\text{Cos A} = \frac{1 + mm'}{\sqrt{(m - m')^2 + (1 + mm')^2}} = \frac{1 + mm'}{\sqrt{(m^2 + 1)(m'^2 + 1)}}.$$

Je remplace, dans l'expression de cos ω, les lignes trigonotriques des angles φ, φ' et A par leurs valeurs; il vient ainsi :

$$\text{Cos}\,\omega = \frac{(x - \alpha)(x - \alpha')}{\text{R R}'} + \frac{k^2 (1 + mm')}{t^2 \text{R R}' (m^2 + 1)(m'^2 + 1)}.$$

On tire des équations (1) et (3) :

$$x = \frac{\alpha m - \alpha' m' - \beta + \beta'}{m - m'}, \text{ d'où } x - \alpha = \frac{m'(\alpha - \alpha') - \beta + \beta'}{m - m'},$$

et $$x - \alpha' = \frac{m(\alpha - \alpha') - \beta + \beta'}{m - m'}.$$

Reportant ces valeurs dans les équations (2) et (4), et multipliant les deux membres de chacune par $(m - m')^2$, on a

$$\left.\begin{aligned}&(m^2 + 1)[m'^2(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 - 2m'(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') - \text{R}^2(m - m')^2]\\ &\quad = -(m - m')^2 k\ t^2,\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

et

$$\left.\begin{aligned}&(m'^2 + 1)[m^2(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 - 2m(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') - \text{R}'^2(m - m')^2]\\ &\quad = -(m - m')^2 k^2 t^2.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Pour que les droites se rencontrent, il faut que ces deux équations soient satisfaites par une même valeur de t, ce qui donne l'équation de condition

$$\left.\begin{aligned}&(m + m')[(\alpha - \alpha')^2 - (\beta - \beta')^2]\\ &= -2(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')(mm' - 1) - (m - m')[\text{R}^2(m^2 + 1) - \text{R}'^2(m'^2 + 1)]\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Si je multiplie les deux membres de l'équation (5) par $\frac{-1}{m^2 + 1}$, les deux membres de l'équation (6) par $\frac{1}{m'^2 + 1}$ et si j'additionne membre à membre les deux équations ainsi obtenues, il vient

$$-\frac{(m - m')^2 (m^2 - m'^2) k^2 t^2}{(m^2 + 1)(m'^2 + 1)}$$
$$= (\alpha - \alpha')^2 (m^2 - m'^2) - 2(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')(m - m') + (\text{R}^2 - \text{R}'^2)(m - m')^2.$$

Je tire de cette égalité la valeur de $\frac{k^2 t^2}{(m^2+1)(m'^2+1)}$ que je porte dans l'expression de $\cos\omega$; j'y remplace aussi $x-\alpha$ et $x-\alpha'$ par leurs valeurs déjà trouvées; et il vient, après réduction, la valeur suivante de ce cosinus

$$\frac{(m+m')\left[(\alpha-\alpha')^2-(\beta-\beta')^2\right]+(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')(m^2+m'^2-2)+(R^2-R'^2)(m-m')(1+mm')}{R\,R'\,(m-m')^2\,(m+m')}$$

Cette expression se simplifie, quand on y remplace $(m+m')\left[(\alpha-\alpha')^2-(\beta-\beta')^2\right]$ par le second membre de l'égalité (7); on obtient ainsi, toute réduction faite, la formule suivante :

$$\cos\omega = \frac{m\,R^2+m'\,R'^2-(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')}{R\,R'\,(m+m')}\,. \qquad (8)$$

91. On ne peut plus dire ici, comme au numéro 86, que la condition, pour que l'angle ω tiré de la formule (8) soit réel, exprime que les droites se rencontrent.

Je suppose que les deux droites soient quelconques; pour faciliter la discussion de la formule (8), je suppose, en outre, que leur perpendiculaire commune soit normale à la surface de comparaison (condition qui peut toujours être réalisée par un choix convenable de cette surface). Je prends le pied de cette normale pour origine des abscisses. Pour que les deux droites soient représentées par les équations (1), (2), (3), (4), il faut dans ces équations faire α, β, α' et β' nuls. La formule (8) devient

$$\cos\omega = \frac{m\,R^2+m'\,R'^2}{R\,R'\,(m+m')}\,.$$

Si l'on déplace l'arc des abscisses sur la surface de comparaison, en conservant la même origine, on trouve que la condition, pour que l'expression de $\cos\omega$ conserve la même valeur, quel que soit l'angle dont on fait tourner l'arc des abscisses, est :

$$(m-m')\left[R'^2(m'^2+1)-R^2(m^2+1)\right]=0\,. \qquad (9)$$

Elle ne peut être satisfaite que de deux manières :

1° Si m est égal à m'; dans ce cas, les deux droites ont même projection, et par conséquent sont situées dans un même plan qui contient leur perpendiculaire commune ;

2° Si l'on a $R^2(m^2+1) = R'^2(m'^2+1)$; dans ce cas, on reconnaît, d'après leurs équations, que les deux droites ont un point commun qui se projette sur l'origine; la perpendiculaire commune est alors perpendiculaire au plan des droites.

Si donc les droites ne sont pas dans un même plan, l'équation (9) ne peut pas être satisfaite; l'expression de $\cos\omega$, sous la forme qui a été obtenue, ne peut plus alors avoir aucun sens géométrique défini par la figure que les deux droites forment dans l'espace; car cette expression peut changer de valeur par une transformation de coordonnées, c'est-à-dire qu'elle dépend du choix du système de comparaison.

92. *Angle d'un plan avec une normale à la surface de comparaison.*

Soit $x^2+y^2+Ax+By+C = -k^2t^{-2}$ l'équation d'un plan, que je mets sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2 = -k^2t_{-2}, \qquad (1)$$

en posant $\alpha = -\frac{A}{2}$, $\beta = -\frac{B}{2}$ et $R^2 = \frac{A^2+B^2}{4} - C$.

Soit φ l'angle que ce plan fait avec la normale à l'arc de comparaison en un point P (fig. 42, pl. VI) dont les coordonnées sont x, y, z. Soit A le point qui, sur la surface de comparaison, a pour coordonnées α, β. La normale élevée en ce point est perpendiculaire au plan proposé en un point B.

Je mène le plan normal contenant AB et le point P; ce plan normal coupera le plan proposé suivant une droite BM passant par le point P, et la surface de comparaison suivant l'arc de rayon infini AL qui contient la projection P' du point P. Le plan proposé étant perpendiculaire à AB, est perpendiculaire au

plan de la figure, et si je prolonge suivant P Q la normale P P′, l'angle Q P M sera précisément l'angle φ dont il s'agit de trouver l'expression.

La projection C′ d'un point C pris quelconque sur B M tombera sur l'arc A L. Si je désigne par s la longueur de l'arc A C′, x et y étant les coordonnées du point C′ sur la surface de comparaison, on a, en général (n° 48),

$$s^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2. \qquad (2)$$

La droite B M étant dans le plan proposé, les coordonnées d'un point quelconque de cette droite satisfont à l'équation (1). Si, dans cette équation, je remplace, d'après l'équation (2), la somme $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$ par s^2, il vient

$$s^2 - R^2 = - k^2 t^{-2},$$

équation de la droite B M rapportée, dans le plan de la figure, à l'arc A L et à l'origine A. On en tire (n° 85)

$$\text{Sin}\ \varphi = \frac{k}{t R}, \text{ d'où } \cos \varphi = \frac{\sqrt{t^2 R^2 - k^2}}{t R} \text{ et } tg\ \varphi = \frac{k}{\sqrt{t^2 R^2 - k^2}}.$$

93. *Droite perpendiculaire à un plan. Angle d'un plan et d'une droite qui le rencontre. Angle de deux plans qui se coupent.*

Je conserve la figure du numéro précédent (fig. 42, pl. VI). La perpendiculaire menée par le point P au plan proposé sera située dans le plan de cette figure; elle sera perpendiculaire à la droite B M qui est représentée dans son plan (n° 92) par l'équation $s^2 - R^2 = - k^2 t^{-2}$. Son équation sera donc (n° 86) de la forme $(S - a)^2 - a^2 + R^2 = - k^2 T^{-2}$ ou $S^2 - 2 S a + R^2 = - k^2 T^{-2}$.

Pour établir les équations de cette droite dans le système primitif de comparaison à trois coordonnées, on a, en désignant par X et Y les coordonnées courantes de l'arc A L suivant lequel la perpendiculaire se projette,

$$Y - \beta = \frac{y - \beta}{x - \alpha} (X - \alpha),$$

première équation de la perpendiculaire, dans laquelle les coordonnées x, y, se rapportent à son pied.

On a, en outre,

$$S^2 = (X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = (X - \alpha)^2 \frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{(x-\alpha)^2};$$

de là, la seconde équation

$$(X - \alpha)^2 \frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{(x-\alpha)^2} - 2a \frac{X-\alpha}{x-\alpha} \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} + R^2$$
$$= -k^2 T^{-2}.$$

La perpendiculaire coupant le plan au point P, dont les coordonnées sont x, y, z, on a

$$2a \sqrt{(x-\alpha) + (y-\beta)^2} - R^2 = R^2,$$

ou
$$a \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = R^2.$$

De là une simplification dans la seconde équation de la perpendiculaire qui devient :

$$(X - \alpha)^2 \frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{(x-\alpha)^2} - 2R^2 \frac{X-\alpha}{x-\alpha} + R^2 = -k^2 T^{-2}.$$

Connaissant les équations de la perpendiculaire à un plan et sachant exprimer analytiquement l'angle de deux droites, on pourra calculer l'angle de deux plans qui se rencontrent et l'angle d'une droite avec un plan.

94. *Tangente à une courbe quelconque; plan tangent à une surface.*

Les lettres x, y, t se rapportant à un point quelconque d'une courbe, la tangente en ce point sera représentée par deux équations, telles que

$$Y - y = (X - x) \frac{dy}{dx}, \qquad (1)$$

et
$$\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)(X^2 + aX + b) = -k^2 T^{-2},$$

dans lesquelles X et Y désignent les coordonnées courantes.

Cette tangente doit passer par le point de contact, et en ce point on doit avoir $\frac{dT}{dX} = \frac{dt}{dx}$; ces deux conditions permettent de déterminer les quantités a et b, et donnent pour la seconde équation de la tangente l'équation suivante :

$$\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)(X - x)^2 + \frac{2k^2}{t}\frac{dt}{dx}(X - x) - k^2 t^2 = -k^2 T^2. \quad (2).$$

Soient $f(x, y, t) = o$ et $\varphi(x, y, t) = o$ les deux équations de la courbe ; on en tire, en prenant x pour variable indépendante :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx} = o, \quad (3)$$

et

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dx} = o. \quad (4)$$

En éliminant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dt}{dx}$ entre les équations (1), (2), (3) et (4), on aura deux équations qui représenteront la tangente.

La première de ces deux équations est

$$\left.\begin{aligned}(X - x)^2 + (Y - y)^2 - 2k^2 t^{-3}\left(\frac{df}{dt}\right)^{-1}\left[(X - x)\frac{df}{dx} + (Y - y)\frac{df}{dy}\right] - k^2 t^{-2} \\ = -k^2 T^{-2}.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

La deuxième équation ne diffère de celle-ci qu'en ce que f est changé en φ.

L'équation (5) représente un plan ; étant indépendante de la fonction φ, elle convient à la tangente menée, par le point de contact donné, à une courbe quelconque située sur la surface qui a pour équation $f(x, y, t) = o$. Elle représente donc le plan tangent à cette surface.

95. *Elément différentiel d'une surface.*

Je conçois la surface décomposée en éléments infiniment petits se projetant sur la surface de comparaison suivant des éléments rectangulaires, dont une dimension égale à dx se compte paral-

lèlement à l'axe des abscisses, et l'autre égale à dy se compte perpendiculairement à cet axe.

Je suppose d'abord que l'aire à mesurer soit sur un plan représenté par l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)\quad-R^2=-k^2\,t^{-2}.$$

Soit φ l'angle que le plan fait en un point quelconque avec la normale à la surface de comparaison. Au point où cet angle est droit, on peut considérer l'élément plan différentiel comme un élément parallèle à la surface de comparaison; et θ désignant la valeur de t relative à ce point, l'élément plan a pour mesure (n° 20, et chap. compl. n° XI) $\theta^2\,dx\,dy$. En un point quelconque, cet élément aura pour mesure $\dfrac{t^2\,dx\,dy}{\sin\varphi}$; or, on a (n° 92) $\sin\varphi=\dfrac{k}{t\,R}$; l'élément différentiel de la surface plane a donc pour expression $\dfrac{R\,t^3\,dx\,dy}{k}$.

Soit, en second lieu, à mesurer un élément différentiel de superficie sur une surface courbe (V. chap. compl. n° XVI) représentée par l'équation $f(x, y, t)=o$. On peut considérer cet élément comme situé sur le plan tangent qui a pour équation (n° 94)

$$(X-x)^2+(Y-y)^2-2\,k^2\,t^{-3}\left(\frac{df}{dt}\right)^{-1}\left[(X-x)\frac{df}{dx}+(Y-y)\frac{df}{dy}\right]-k^2\,t^{-2}$$
$$=-k^2\,T^{-2}.$$

En ramenant cette équation à la forme $(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2-R^2=-k^2\,T^{-2}$, et se reportant à l'expression déjà obtenue d'un élément plan, on trouve, pour l'élément de la surface proposée, la valeur

$$k\left(\frac{df}{dt}\right)^{-1}\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\frac{t^4}{k^2}\left(\frac{df}{dt}\right)^2}\;dx\,dy.$$

96. *Elément différentiel d'un solide.*

Soit une surface limitée à un contour fermé, telle qu'une même normale à la surface de comparaison ne puisse la ren-

contrer qu'en un point. Je considère le solide compris entre cette surface et la surface conique obtenue en abaissant de tous les points du contour sur la surface de comparaison des normales prolongées indéfiniment du côté de la concavité. Je décompose un tel solide en éléments compris chacun entre quatre plans normaux déterminant sur la surface de comparaison un rectangle dont une dimension, égale à dx, est comptée parallèlement à l'arc des abscisses, et l'autre, égale à dy, est comptée perpendiculairement à cet arc. On détermine facilement le volume d'un tel élément en le décomposant par des surfaces parallèles à la surface de comparaison (V. chap. compl. n° XVIII); ce volume a pour expression :

$$\int_{-\infty}^{z} e^{\frac{2z}{k}}\, dx\, dy\,.\,dz, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} k\, t^2\, dx\, dy\,.$$

Des applications que la géométrie imaginaire est susceptible de recevoir.

97. Sans m'étendre longuement sur les applications de la géométrie imaginaire à l'analyse, j'essaierai d'indiquer par un petit nombre d'exemples de quelle nature ces applications peuvent être.

1° Soient, en général, $\varphi\,(x, y, z, a, b\ldots)$, $\psi\,(x, y, z, a, b\ldots)$, $\chi\,(x, y, z, a, b\ldots)$ les fonctions qu'on a à substituer à x, y, z, dans une transformation de coordonnées, $a, b\ldots$ désignant les constantes que cette transformation introduit ; toute fonction $F\,(\varphi, \psi, \chi)$, dans laquelle les constantes $a, b\ldots$ restent arbitraires, conservera encore la même forme en x, y, z, après avoir subi une transformation de coordonnées quelconque. En effet, l'équation $F\,(x, y, z) = o$, relative à un système S de comparaison, devient, quand on la rapporte à un système S', de la forme générale $F\,(\varphi, \psi, \chi) = o$; pour passer du système S' à un système S'' quelconque, on peut revenir d'abord au système pri-

mitif S, ce qui ramène l'équation à la forme F $(x, y, z) = o$, et partir de là pour passer au système S'', ce qui rend à l'équation sa forme générale F $(\varphi, \psi, \chi) = o$(1).

2° Le système d'équations représentant une ligne droite est le seul qui, rendu général par une transformation arbitraire de coordonnées, ne contienne que quatre constantes arbitraires. En effet, si une ligne n'est pas droite, deux points ne peuvent suffire pour en définir la position dans l'espace; or, les équations qui expriment analytiquement qu'une ligne passe par deux points sont au nombre de quatre; les deux points ne déterminant pas la position de la ligne, les quatre équations ne déterminent pas la valeur des constantes; donc le nombre de ces constantes est supérieur à quatre.

3° Si, par des considérations indépendantes de la théorie des parallèles, on a déterminé dans une figure quelconque la mesure de certains éléments, on peut affirmer que les résultats obtenus sont précisément ceux auxquels conduirait le calcul, si on l'effectuait conformément aux méthodes générales; et l'on connaît ainsi d'une manière certaine le résultat d'un tel calcul, sans qu'il soit nécessaire de l'effectuer. Si, par exemple, on applique la formule (*c*) du n° 25 à l'équation paramétrale de la circonférence, on devra nécessairement trouver, pour la longueur de la circonférence entière, un résultat identique à celui qui a été obtenu au n° 75 par des considérations géométriques.

Lobatschewsky a indiqué quelques applications fondées sur ce dernier principe (voir *Journal de Crelle*, t. XVII, année 1837). Les formules dont il a fait usage se rapportent à un système de coordonnées rectilignes. Celles que j'ai établies, se rapportant à un autre système, en diffèrent, et conduiront généralement à d'autres conséquences analytiques. De telles applications semblent n'avoir offert jusqu'à présent que peu d'intérêt; mais rien cependant n'autorise à affirmer qu'elles n'en acquerront pas un jour davantage.

(1) Cette proposition et la suivante sont présentées ici comme fournissant des applications de la géométrie *imaginaire*. Elles subsistent d'ailleurs dans la géométrie *vraie*.

Remarque au sujet de l'évidence du postulatum d'Euclide.

98. Quoique les ressources du raisonnement soient impuissantes à établir en toute rigueur la théorie des parallèles, l'exactitude de cette théorie ne fait cependant l'objet d'aucun doute. Ainsi, nous avons la certitude que l'oblique rencontre la perpendiculaire, sans que ce principe résulte en rien de la loi de nécessité.

Est-ce dans l'expérience que nous puisons une telle certitude? S'il en était ainsi, elle ne saurait être complète; car l'imperfection de nos sens ne nous permet pas d'embrasser dans nos observations une étendue indéfinie de l'espace, ni de relever avec une précision parfaite aucun élément dans une figure quelle qu'elle soit, de dimensions petites ou grandes.

Est-ce simplement le sens commun qui nous fait voir clairement que l'oblique rencontre la perpendiculaire? Mais peut-on attribuer à ce sens commun le pouvoir de rendre évident un principe dont la négation ne peut conduire à aucune absurdité constatée?

N'est-il pas plus naturel de chercher hors de nous, hors de nos facultés, la puissance qui nous révèle une telle vérité, et de reconnaître ainsi la nécessité d'une cause première, éternelle et immuable comme la vérité même qu'elle nous révèle?

CHAPITRE COMPLÉMENTAIRE.

Des axiomes particuliers à la géométrie. — Existence de surfaces planes. — La somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne peut excéder deux angles droits. — Mesure de l'angle dièdre. — Définition géométrique de la longueur d'un arc de courbe. — De la tangente. — Aire d'une surface plane. — Aire d'une surface courbe. — Volume d'un solide. — Démonstration récemment proposée par M. Carton pour affranchir la théorie des parallèles du postulatum d'Euclide; postulatum sous-entendu dans cette démonstration.

I. L'objet des trois premiers chapitres a été de faire voir qu'il existe un ensemble de formules analytiques qui, lorsqu'on leur attribue un certain sens géométrique, vérifient dans toutes leurs conséquences les axiomes de géométrie autres que le postulatum d'Euclide, sans que cependant ce postulatum puisse en être déduit; d'où il résulte que le postulatum ne peut pas être une conséquence des autres axiomes.

C'est d'après les conclusions de ce chapitre complémentaire, que j'ai pu substituer aux axiomes de géométrie les trois propositions énoncées déjà aux n°s 36 et 70. Je fais remarquer ici que le choix de ces principes n'est assujetti, eu égard au rôle qui leur est réservé, qu'à une seule condition : ils doivent être tels que tous les axiomes de la géométrie, hormis le postulatum, puissent en être déduits. *Sous quelque forme que ces principes soient présentés,* il suffira, pour justifier les conclusions des chapitres II et III, de s'assurer qu'ils satisfont à cette condition.

Je suppose la ligne droite définie par la condition d'être le plus court chemin entre deux quelconques de ses points ; j'invoque donc la notion du plus ou du moins dans les longueurs comptées sur des lignes quelconques ; j'invoquerai aussi celle

de l'invariabilité d'une figure indépendamment du lieu qu'elle occupe dans l'espace. Il est permis ici de faire intervenir ces notions, pourvu que l'unique condition imposée soit remplie.

Les énoncés dont j'ai fait choix sont les suivants :

A. Soit, dans une figure invariable, un point P et une droite L passant par ce point ; la figure peut être transportée d'un lieu de l'espace dans un autre, de manière que le point P coïncide avec un point P' quelconque fixe dans l'espace, et que la droite L s'applique exactement sur une droite L', quelle qu'elle soit, menée par le point P' (d'après le principe suivant, il suffit, pour que les deux droites coïncident, qu'elles aient deux points communs). *En outre, si la figure ne se réduit pas à la droite L, elle pourra changer de lieu dans l'espace en tournant autour de deux points fixes pris sur cette ligne, et ce mouvement de rotation pourra être continué indéfiniment* (1).

B. Par deux points on ne peut faire passer qu'une seule ligne droite.

C. Le lieu des points situés à des distances constantes de deux points fixes, est une courbe fermée unique, en dehors de laquelle aucun point de l'espace ne fait partie du lieu.

Il s'agit de ramener à ces trois propositions tous les axiomes particuliers à la géométrie, à l'exception du postulatum d'Euclide. Ces axiomes, ceux du moins qui ne sont pas explicitement compris dans les principes que je viens d'énoncer, peuvent être tous résumés dans les propositions suivantes :

1° Il existe des surfaces planes, c'est-à-dire des surfaces conte-

(1) Dans une note communiquée à la *Société philomathique* de Paris, et insérée au journal *l'Institut* (n° du 16 février 1870), j'avais énoncé ce premier principe dans les termes suivants :

«Une figure est susceptible de se déplacer dans l'espace d'une infinité de manières, par exemple par une rotation autour de deux points fixes, en restant identique à elle-même, c'est-à-dire en conservant les mêmes relations entre tous ses éléments, dont la mesure reste invariable.»

C'est pour présenter le même principe dans des termes plus précis, que j'ai modifié la forme de cet énoncé en y substituant la proposition *A*.

nant entièrement toute droite qui joint deux quelconques de leurs points.

2° La longueur d'une courbe, l'aire d'une surface, le volume d'un solide, sont des quantités susceptibles d'une mesure déterminée, indépendante du lieu que la figure peut occuper dans l'espace, et, par suite, indépendante de tout système de comparaison (quoique la définition de la ligne droite suppose qu'on possède la notion du plus et du moins dans les grandeurs linéaires, il y aura cependant lieu de montrer que la mesure des longueurs sur une courbe, comme la mesure des aires et celle des solides, peut être obtenue par des procédés géométriques conduisant à des résultats déterminés).

A ces deux propositions je joins la suivante, que Legendre a considérée comme un axiome :

3° L'aire plane est moindre que l'aire de toute surface terminée au même contour.

Ce dernier principe se démontrerait facilement d'après la définition de l'aire d'une surface courbe, au moyen de la théorie des projections ; mais il ne faut pas perdre de vue qu'ici aucune démonstration ne doit s'appuyer sur la théorie des parallèles, ni, par conséquent, sur la théorie des projections telle qu'elle se déduit de celle-ci.

Je ferai voir que ces trois principes ou axiomes peuvent être considérés comme résultant des propositions *A*, *B*, et *C* (1).

J'aurai aussi à établir quelques théorèmes que j'ai précédemment invoqués en renvoyant à ce chapitre pour leur démonstration.

Je terminerai en analysant, une démonstration récemment

(1) Je ne parle pas du principe de continuité qu'on invoque dans certaines démonstrations, ce principe ne constituant pas un axiome général de géométrie ; il est d'ailleurs facile de s'assurer que, dans toutes les circonstances où ce principe peut être invoqué, il se retrouve dans les formules mêmes ; car la mesure de tout angle, de toute longueur, de toute surface, de tout volume, exprimée au moyen des formules paramétrales, varie d'une manière continue, lorsqu'on fait varier d'une manière continue l'un des éléments dont cette mesure dépend.

proposée à l'Académie des sciences, et par laquelle M. Carton a essayé d'établir *à priori* la théorie des parallèles. Cet examen fera ressortir le postulatum sous-entendu dans la démonstration proposée.

Existence du plan.

II. Pour établir l'existence des surfaces planes, je poserai successivement quelques théorèmes élémentaires dont la démonstration peut être faite au moyen des propositions fondamentales *A, B, C* (n° I), sans recourir en rien à la considération du plan :

1° Deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun sont égaux.

Il n'y a lieu de modifier en rien la démonstration universellement donnée de cette proposition.

2° Deux triangles qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun sont égaux.

J'amène par un déplacement les deux triangles à avoir un des côtés égaux commun (prop. *A*) ; soient alors A B C, A B′ C (fig. 43, pl. VI) les deux triangles à comparer, dans lesquels A B est égal à A B′ et C B à C B′. D'après la proposition *C*, si je fais tourner A B′ C autour de A C, le point B′ décrira une courbe qui contiendra le point B ; je pourrai donc par cette rotation faire coïncider B′ avec B. Les deux triangles ayant alors leurs trois sommets aux mêmes points, coïncideront dans toute leur étendue (prop. *B*) ; donc ils sont égaux.

3° D'un point O (fig. 44, pl. VI) extérieur à une droite M N on peut toujours abaisser une perpendiculaire sur cette droite.

Je puis, en effet, concevoir une sphère d'un rayon assez grand pour qu'elle intercepte sur la droite M N une certaine portion A B de cette droite. Soit P le milieu de A B ; je mène les droites O A, O B et O P. Les deux triangles O A P et O B P ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun sont égaux, donc l'angle O P A

est égal à l'angle O P B, c'est-à-dire que la droite O P est perpendiculaire sur M N.

4° Deux obliques O A et O B (fig. 44, pl. VI) s'écartant également du pied de la perpendiculaire O P sont égales.

En effet les deux triangles O P A et O P B ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun sont égaux, d'où résulte la proposition énoncée.

5° Soient deux droites P X et P X' (fig. 45, pl. VI), toutes deux perpendiculaires à la droite M N au point P ; on pourra toujours, en faisant tourner la droite P X' autour de M N, la faire coïncider avec P X.

Je porte de part et d'autre du point P sur la droite M N des longueurs égales, P A, P B.

Il sera toujours possible de prendre sur les droites P X et P X' deux points à égale distance du point A. D'après le théorème précédent ils seront aussi à égale distance du point B. Donc, d'après la proposition *C*, une rotation autour de M N pourra amener le point O' en O, et alors la droite P X' coïncidera dans toute son étendue avec la droite P X.

6° Si l'on fait tourner autour d'un axe M N (fig. 46, pl. VI) une droite qui lui est perpendiculaire au point P, cette droite engendrera un plan.

En effet, soient A et B deux points de la surface ainsi engendrée et situés sur les droites P X et P X' perpendiculaires à M N au point P. Sur la droite A B, qui joint ces deux points, je prends un point R quelconque ; sur M N, de part et d'autre du point P je prends deux longueurs égales P L, P L' ; je joins par des droites le point P au point R, et les points L et L' aux points A, B, R. Les obliques A L et A L' s'écartant également du pied de la perpendiculaire A P sont égales ; il en est de même des deux obliques B L, B L'. Les deux triangles A B L, A B L' ayant ainsi leurs trois côtés égaux chacun à chacun, sont donc superposables ; on en déduit que les droites R L et R L' sont égales.

Les deux triangles L P R, L' P R ont donc aussi leurs trois côtés égaux chacun à chacun, donc ils sont égaux, et l'angle L P R de l'un est égal à l'angle L' P R de l'autre ; c'est-à-dire que la droite

PR est perpendiculaire à MN. Le point R pris quelconque sur la droite AB qui joint deux points de la surface considérée, est donc, d'après le théorème précédent, sur une des positions que la perpendiculaire peut prendre en tournant autour de MN; c'est-à-dire que ce point, et par conséquent la droite AB toute entière, est situé sur cette surface. Donc la surface est un plan.

III. *La somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne peut excéder deux angles droits.*

Legendre a indiqué dans ses *Éléments de géométrie* (livre I, prop. XIX) une construction par laquelle, un triangle quelconque étant donné, on peut en modifier indéfiniment la forme, sans que la somme des angles soit changée. Il arrive ainsi à construire une suite de triangles qui ont tous même somme d'angles que le triangle proposé, et dont deux angles tendent vers zéro, de sorte que le troisième a cette somme pour limite; en même temps les côtés croissent indéfiniment. Rien ne démontrant que la hauteur abaissée sur le plus grand côté tend vers zéro, on n'est pas en droit de conclure, comme l'avait fait Legendre, à moins de s'appuyer sur le postulatum d'Euclide, que le troisième angle tend vers deux angles droits; mais il est certain qu'étant toujours plus petit que deux angles droits, il ne peut tendre vers une limite plus grande. La somme des trois angles du triangle, qui est précisément la limite vers laquelle tend ce troisième angle, ne peut donc pas excéder deux angles droits (1).

(1) De ce théorème, on déduit facilement, comme corollaire, que, si un triangle est entièrement contenu dans un autre, la somme des trois angles du premier triangle est au moins égale à la somme des angles du triangle enveloppant.

Or, quelque petit que soit un angle ε, on peut toujours construire un triangle T, dont un angle soit égal à $2^{dr.} - \varepsilon$; ce triangle étant construit, on démontre sans peine que les côtés d'un triangle infinitésimal t quelconque peuvent devenir assez petits pour que t soit contenu dans T; la somme des angles du triangle t devient alors au moins égale à la somme des angles du triangle T, et, par conséquent, plus grande que $2^{dr.} - \varepsilon$, et cela quelque petit que soit l'angle donné ε; d'ailleurs, cette somme ne peut excéder 2^{dr};

Cette proposition permet de démontrer le théorème suivant auquel j'aurai recours dans la suite.

IV. Soit dans un même plan une droite indéfinie MN (fig. 47, pl. VII), et un élément rectiligne AB, qui peut être fini ou infiniment petit, et qui se projette orthogonalement sur MN suivant A'B'; je dis que, dans aucun cas, A'B' ne peut être plus grand que AB.

Pour le démontrer, du point A j'abaisse AC perpendiculaire sur BB', et je mène la droite DE perpendiculaire sur le milieu de B'C, coupant en E le côté AA'. Si je rabats le quadrilatère DEA'B' sur le même plan, en le faisant tourner autour de DE comme charnière, B' tombera en C, et le côté B'A' prendra la direction de CA. Si A'B' était plus grand que AC, le point A' se rabattrait en un point a situé sur le prolongement du côté CA; l'angle CaE étant droit, l'angle CAE serait obtus, et, par conquent, dans le quadrilatère CAA'B' la somme des quatre angles serait supérieure à quatre angles droits, ce qui est inadmissible, la somme des trois angles d'un triangle ne pouvant excéder deux angles droits. Donc A'B' ne peut être plus grand que AC, ni, à plus forte raison, que AB.

Soit maintenant AB infiniment petit, et l'angle BAC fini; d'après le n° 7 du chapitre 1er, le rapport $\frac{AB}{AC}$, et, par suite, aussi le rapport $\frac{AB}{A'B'}$ surpassera l'unité d'une quantité finie.

V. *Mesure de l'angle dièdre.*

Soit un angle dièdre LABM (fig. 48, pl. VII); soient P et P' deux points quelconques sur l'arête. Par ces deux points, et perpendiculairement à l'arête AB, je mène des plans coupant les deux faces, le premier suivant PR et PS, le second suivant

on retrouve donc ainsi ce théorème déjà démontré au commencement du chapitre 1er (n° 1) :

Dans un triangle infinitésimal, la somme des trois angles est, à la limite, égale à deux angles droits.

P'R' et P'S' (l'existence de tels plans a été démontrée au n° II) ; je dis que les deux angles RPS, R'P'S' sont égaux.

Ordinairement on s'appuie sur la théorie des parallèles pour démontrer cette proposition ; ici, cette théorie ne doit pas être invoquée, ce qui oblige à présenter la démonstration du théorème sous une autre forme.

Je prolonge la face MAB au delà de l'arête, et je forme ainsi un second angle dièdre LABN adjacent au premier. Les plans perpendiculaires à l'arête AB menés par les points P et P' coupent la face ABN suivant les droites PT et P'T', qui sont les prolongements de PS et P'S'.

Je suppose les deux angles SPR et TPR commensurables, et je les conçois divisés en parties égales à la commune mesure. Soient gPh et uPv deux quelconques de ces divisions ; je fais passer des plans par l'arête AB et par chacune des droites Pg, Ph, Pu, Pv. Ces plans déterminent, sur le plan R'T'S', des angles $g'P'h'$, $u'P'v'$. Si je fais tourner l'angle hPg autour de AB comme axe, ses côtés resteront dans le plan RTS, et je pourrai faire coïncider cet angle avec son égal uPv. Mais, dans cette rotation, les côtés de l'angle $g'P'h'$ restent dans le plan R'T'S', qui est perpendiculaire à AB, et viennent coïncider avec ceux de l'angle $u'P'v'$; les angles $u'P'v'$ et $g'P'h'$ sont donc égaux.

En appliquant la même construction à toutes les lignes issues du point P qui partagent les angles SPR et TPR en parties égales, on arrive à cette conclusion, que les angles S'P'R' et T'P'R' sont entre eux dans le même rapport que les angles SPR et TPR. Cette proportionnalité, établie dans le cas où ces deux derniers angles ont une commune mesure, s'établira ensuite sans aucune difficulté dans le cas où ils sont incommensurables. On a donc d'une manière générale :

$$\frac{\text{angle SPR}}{\text{angle TPR}} = \frac{\text{angle S'P'R'}}{\text{angle T'P'R'}} ;$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\text{angle SPR}}{\text{angle SPR} + \text{angle TPR}} = \frac{\text{angle S'P'R'}}{\text{angle S'P'R'} + \text{angle T'P'R'}} .$$

Or, on a

angle S P R + angle T P R = angle S′ P′ R′ + angle T′ P′ R′ = 2^{dr};

donc

Angle S P R = Angle S′ P′ R′,

ce qu'il fallait démontrer.

Cet angle constant mesure l'angle dièdre.

Longueur d'un arc de courbe. — Tangente.

VI. Soit sur une courbe quelconque un arc M N (fig. 49, pl. VII). J'imagine inscrits successivement dans cet arc des contours polygonaux C_1, C_2, C_3...., dont la suite indéfinie est assujettie à cette seule condition que, quel que soit un contour polygonal R invariable inscrit dans l'arc M N, il existe toujours dans la suite C_1, C_2, C_3.... un contour C_r, qui ait, ainsi que tous ceux d'un indice supérieur à r, des sommets sur chacun des arcs sous-tendus par les côtés du contour R. Je dis que, dans ces conditions, la limite L, vers laquelle tendent les périmètres P_1, P_2, P_3... des contours C_1, C_2, C_3...., est déterminée.

En effet, soit P_s le périmètre du contour C_s dont les sommets, en nombre n, sont aux points a_1, a_2, a_3...., a_n. J'imagine n sphères ayant ces sommets pour centres, et ayant un même rayon ρ qui pourra être aussi petit qu'on voudra.

Je suppose maintenant qu'une nouvelle suite de contours C_1', C_2', C_3'...., différente de la première, fournisse des périmètres P_1, P_2, P_3.... dont la limite L′ puisse différer de L; il existera dans cette suite un contour C_v' qui aura, ainsi que tous ceux d'un indice supérieur, des sommets sur chacun des arcs enveloppés par les sphères. Je ne considère sur chacun de ces arcs qu'un seul sommet du contour C_v', et je le joins par une ligne droite au centre de la sphère correspondante. Je forme ainsi n cordes, dont la somme est moindre que $n\rho$. Or, si j'ajoute ces cordes, répétées chacune deux fois, au périmètre P′, la somme ainsi obtenue, moindre que $P_v' + 2n\rho$, sera plus grande que P_s, car elle se compose de lignes brisées aboutissant aux extrémités de chacune des cordes qui forment le périmètre P_s. J'ai donc l'inégalité $P_v' + 2n\rho > P_s$, qui subsistera si

je change l'indice v en un indice d'un rang supérieur quelconque. Si donc on remplace P'_v par la limite L', la somme $L' + 2n_\rho$ ne pourra jamais être inférieure à P_ρ. D'ailleurs ρ peut devenir plus petit que toute quantité donnée, et P_ρ diffère aussi peu qu'on veut de L. Donc L' ne peut être en aucun cas moindre que L. Par la même raison L ne peut être moindre que L'; on a donc nécessairement $L = L'$, ce qu'il fallait démontrer.

Cette limite constante est, par définition, la longueur de l'arc (1).

Remarque. — Après le raisonnement qui vient d'être exposé, il est nécessaire de revenir sur la définition de la ligne droite.

(1) J'ai supposé que les périmètres des contours polygonaux successivement inscrits dans l'arc ne croissaient pas au delà de toute limite; je dis que sur une courbe, quelle qu'elle soit, on peut toujours prendre un arc tel que cette condition soit remplie. Je remarque d'abord que le périmètre d'un polygone inscrit dans une circonférence de rayon quelconque est moindre que celui d'un polygone circonscrit qu'il est toujours possible de construire, et par conséquent tend vers une limite finie qui est la longueur de la circonférence. Cela posé, je considérerai successivement le cas d'une courbe plane, le cas d'une courbe sur la surface d'une sphère, et enfin le cas d'une courbe quelconque.

1° *Cas d'une courbe plane.* Soit un point O dans le plan hors de la courbe (fig. 50, pl. VII); je prends sur la courbe un arc A B tel qu'il ne puisse être coupé qu'en un point, soit par une droite issue du point O, soit par une circonférence décrite du point O comme centre (cette condition est toujours réalisable). Soit $OB > OA$; je mène l'arc de circonférence B H, compris dans l'angle au centre B O A. On reconnaît de suite, par la construction indiquée sur la figure, que le périmètre de tout contour polygonal inscrit dans l'arc A B est moindre que la somme A H + arc H B, et par conséquent a une limite finie.

2° *Cas d'une courbe située sur la surface d'une sphère.* Raisonnement semblable; les droites issues du point O doivent être remplacées dans ce cas par des arcs de grand cercle, et l'arc B H par un arc de grand cercle décrit du point O comme pôle.

3° *Cas d'une courbe quelconque.* Pour ramener ce cas général au cas précédent, on pourra conserver encore la même forme de raisonnement: l'arc B H, au lieu d'être un arc de cercle, sera alors la projection conique de l'arc A B sur la surface d'une sphère décrite du point O comme centre.

Toutes les propriétés de cette ligne ont été tirées des deux principes suivants :

1° La ligne droite est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points.

2° Par deux points on ne peut faire passer qu'une seule ligne droite.

Ces deux propositions, dont la première suppose la notion du plus ou du moins dans les longueurs comptées sur les lignes courbes, contiennent une définition et un axiome. Tant qu'il ne s'est pas agi de préciser ce qu'on entend par la longueur d'un arc de courbe, il n'y a pas eu lieu, dans les démonstrations, de s'inquiéter où était l'axiome et où était la définition; et si j'ai considéré quelquefois le premier de ces deux principes comme contenant la définition de la ligne droite, je peux aussi bien tirer cette définition du second. Je dirai, dans ce cas, que *d'un point* A *à un point* B *il existe toujours une ligne, mais une seule, dont aucun point ne peut être déplacé par une rotation autour des points fixes* A *et* B. J'appellerai *ligne droite* la ligne unique qui satisfait à cette condition, et je ferai remarquer qu'une telle ligne jouit nécessairement de la même propriété entre deux quelconques de ses points.

En second lieu, conservant le nom de *ligne brisée* à toute ligne composée de lignes droites, j'énoncerai, comme axiome, cet autre principe, que *la ligne droite est plus courte que toute ligne brisée terminée aux mêmes extrémités* (1). La longueur d'une courbe étant définie par la limite vers laquelle tend une ligne brisée terminée à ses deux extrémités et dont le périmètre peut être toujours croissant, ce dernier principe contient la première des deux propriétés générales de la ligne droite : *la ligne droite est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points.*

En procédant ainsi, on s'affranchit de toute notion préalable

(1) L'évidence de ce principe permet de le considérer comme un axiome; je n'ai pas à examiner ici s'il est ou non susceptible de démonstration.

sur la longueur des lignes courbes ; en revanche, on introduit un nouvel axiome : *l'existence de la ligne droite.*

VII. Je rappelle ici ce théorème de géométrie élémentaire, que, dans un plan, un arc convexe (c'est-à-dire qui ne peut être coupé par une ligne droite en plus de deux points) est moindre que toute ligne enveloppante.

On en déduit ce corollaire, que, sur une circonférence O quelconque (fig. 51, pl. VII), un arc A C est moindre que la tangente A T menée par l'extrémité A, et limitée au prolongement du rayon O C qui passe par l'autre extrémité de l'arc.

VIII. *De la tangente à une courbe quelconque.*

Soit un arc de courbe M N (fig. 52, pl. VII) ; je dis que, généralement, si, à partir d'un point quelconque de la courbe, je prends un arc infiniment petit, la corde qui sous-tend cet arc aura une direction déterminée, et qu'il ne peut y avoir d'exception à cette règle qu'en des points isolés de la courbe.

Je prends sur la courbe MN un arc quelconque R S, dans lequel j'inscris un contour polygonal R a ... pq ... S.

Admettons qu'à partir de chaque point de l'arc R S, qui peut être aussi petit qu'on voudra, on puisse prendre, dans le sens de M à N, deux arcs infiniment petits, dont les cordes, issues toutes deux de ce point, fassent entre elles un angle plus grand qu'un certain angle α différent de zéro. S'il pouvait en être ainsi, quelque petite qu'on suppose une longueur σ, il existerait toujours une longueur σ' assez petite pour que, à partir de chaque point h de l'arc R S, on puisse prendre deux arcs moindres que σ, et en même temps plus grands que σ', dont les cordes, issues toutes deux du point h, fassent entre elles un angle plus grand que α. Le point h appartenant, par exemple, à l'arc sous-tendu par le côté pq, l'une au moins de ces deux cordes devra avoir avec sa projection orthogonale sur $p\,q$ (n° IV), un rapport surpassant l'unité d'une quantité qui restera toujours supérieure à une certaine limite déterminée différente de zéro, quelque petite que devienne la longueur de l'arc pq, et quel que soit σ.

Il est facile d'en conclure, en désignant par L la longueur de l'arc R S, qu'après avoir construit un contour polygonal Ra...pq... S, dont le périmètre P diffère aussi peu qu'on veut de L, on pourrait, dans l'hypothèse où je me suis placé, en intercalant de nouveaux sommets entre les points R, a, ... p, q,...S, former un second contour de périmètre P', tel que le rapport $\frac{P'}{P}$ surpasserait l'unité d'une quantité qui resterait finie lorsque P tendrait vers L. Mais une telle conclusion est inadmissible, P' restant toujours compris entre les longueurs P et L dont le rapport tend vers un. Donc, quelque petit que soit l'arc R S, il contient nécessairement certain point h à partir duquel la corde qui sous-tend un arc infinitésimal a une direction limite déterminée (je suppose ici que l'arc infinitésimal est pris à partir du point h dans un sens donné, par exemple dans le sens de M à N). Donc aussi les points qui ne remplissent pas cette condition, s'il en existe, sont des points isolés.

Soit h T la droite menée suivant la direction limite d'une corde qui sous-tend un arc infinitésimal pris à partir du point h sur la branche h N. La droite h T est la *tangente* à cette branche menée par le point h.

Soit h T' la tangente à la branche h M menée par le même point; je dis que, généralement, les droites h T et h T' sont dans le prolongement l'une de l'autre, et qu'il ne peut y avoir d'exception à cette règle qu'en des points isolés de la courbe.

En effet, si l'on supposait qu'en chaque point d'un arc R S aussi petit qu'on voudra, il puisse y avoir double tangente, on pourrait déterminer une longueur telle que deux cordes issues d'un même point de l'arc, de part et d'autre de ce point, et plus petites que cette longueur, fassent toujours entre elles un angle fini. Imaginons alors une série de contours polygonaux inscrits dans l'arc R S, dont tous les côtés, que je suppose de même ordre, soient moindres que cette longueur; en joignant les sommets de deux en deux, je formerai un nouveau contour, dont le périmètre diffèrerait du précédent d'une quantité finie (n° 8); or, d'après le n° VI, ce résultat ne peut être admis; donc, en général, la tangente en un point est unique.

IX. Quelle que soit la loi suivant laquelle deux points M et N d'une courbe (fig. 53, pl. VII) viennent à se confondre en un seul point P où la tangente à la courbe est unique, l'angle que la corde MN fait avec la tangente en chacun des points M et N tend vers zéro.

En effet, on peut toujours concevoir de part et d'autre du point P des arcs PR et PS suffisamment petits pour que, sur toute leur étendue, il n'y ait en chaque point qu'une seule tangente. Dans ce cas, quelque petit que soit un angle ε fini, il y aura toujours une longueur σ finie, telle que la corde de tout arc moindre que σ et compté sur RS fasse avec la tangente à l'une quelconque de ses extrémités un angle moindre que ε; car s'il en était autrement, il est aisé de reconnaître qu'il y aurait en certain point deux tangentes faisant entre elles un angle au moins égal à ε.

Cela posé, lorsque l'arc MN sera moindre que σ, l'angle que sa corde fera avec l'une quelconque des tangentes en M et en N sera moindre que ε; d'ailleurs, l'angle ε peut être pris aussi petit qu'on veut; d'où résulte la proposition énoncée.

Corollaire. Quand la corde MN est infiniment petite, la distance d'un point quelconque de l'arc MN à cette corde est un infiniment petit d'un ordre supérieur.

En effet, deux cordes infinitésimales issues d'un même point de la courbe, étant toutes deux infiniment voisines de la tangente en ce point, font entre elles un angle infiniment petit; si donc de l'extrémité de l'une d'elles j'abaisse une perpendiculaire sur l'autre, la longueur de cette perpendiculaire sera d'un ordre plus élevé que chacune des deux cordes (ch. Ier, n° 5).

X. La tangente étant unique en chaque point de l'arc RS (fig. 53, pl. VII), si un point P se déplace sur cet arc d'une manière continue, la tangente en ce point se déplacera elle-même d'une manière continue.

En effet, soit P' un point infiniment voisin du point P, la corde

PP' fera un angle infiniment petit avec chacune des tangentes en P et en P'; donc ces deux tangentes, sur une longueur finie quelconque, sont infiniment voisines de la corde que je suppose prolongée dans les deux sens; donc aussi, sur une longueur finie quelconque, les deux tangentes sont infiniment voisines l'une de l'autre.

Aire d'une courbe plane.

XI. Je conçois l'espace plan décomposé en zones identiques par une suite illimitée d'arcs de rayon infini, tels que uv, $u'v'$... (fig. 54, pl. VII), tous parallèles à un même arc donné UV, et interceptant sur une quelconque de leurs normales communes des divisions égales d'une longueur h (ch. II, n° 19). Je conçois de même toutes les zones décomposées en cases identiques, limitées chacune par deux normales dont la longueur est h, et par deux arcs dont les longueurs a et b sont les mêmes pour chaque case (b est déterminé lorsque h et a le sont). Si une figure est formée par la réunion de 2, 3, 4... de ces cases, je dirai que l'aire de cette figure est double, triple, quadruple... de l'aire d'une case.

Soit, d'une manière générale, à comparer deux surfaces quelconques S et T, situées dans le plan, et limitées chacune par un contour fermé. Si les dimensions h, a, b des cases sont suffisamment petites, il y aura un certain nombre m de ces cases qui seront entièrement contenues à l'intérieur de la surface S, et un certain nombre n à l'intérieur de la surface T. Les arcs qui limitent les différentes zones étant toujours supposés, quant à présent, parallèles à l'arc donné UV, on démontrera, comme on le ferait si, la théorie des parallèles étant admise, on avait à raisonner sur des cases déterminées par deux systèmes de lignes droites se coupant à angle droit, que, lorsque les dimensions h, a, et par suite b, deviennent infiniment petites, le nombre des cases traversées par les contours des surfaces S et T devient négligeable auprès des nombres m et n; et que, en outre, le rapport $\frac{m}{n}$ tend vers une limite déterminée, indépendante de

la loi suivant laquelle décroissent les dimensions des cases. C'est par cette limite que je définis le rapport entre les aires des surfaces S et T; ainsi, si l'aire T est prise pour unité de surface, l'aire S aura pour mesure $\lim. \frac{m}{n}$ (on verra plus loin que cette mesure est indépendante de la position de l'arc U V).

Remarquons de suite que, le nombre des cases traversées par un contour fermé quelconque devenant, lorsque les dimensions de ces cases sont infiniment petites, négligeable auprès du nombre de celles que ce contour enveloppe entièrement, l'aire d'une figure composée de plusieurs autres est, d'après la définition précédente, un *tout* dont les aires des figures partielles forment les différentes *parties*.

Je présenterai la même définition sous une seconde forme équivalente à la première, et à laquelle j'aurai l'occasion de me reporter dans la suite de ce numéro :

Soient A B et C D (fig. 55, pl. VII) deux arcs de rayon infini parallèles à un arc donné U V, et qui, touchant le contour d'une surface S en des points M et N, laissent cette surface tout entière, l'un du côté de sa convexité, l'autre du côté de sa concavité. Entre les arcs A B et C D, je mène différents arcs $u_1 v_1$, $u_2 v_2$,... $u_p v_p$ parallèles à l'arc U V, et limités au contour de la surface S. Soient l_1, l_2,... l_p les longueurs de ces arcs exprimées numériquement par leurs rapports à l'unité de longueur; soient z_1, z_2,... z_p, z_{p+1} les distances successives, exprimées numériquement, qui séparent les arcs A B, $u_1 v_1$, $u_2 v_2$,... $u_p v_p$, C D. Conformément à la définition précédente, l'aire de la surface S est proportionnelle à la limite vers laquelle tend la somme $l_1 z_1 + l_2 z_2 + \ldots\ldots + l_p z_p$, lorsque les hauteurs z_1, z_2,... z_p, z_{p+1} deviennent toutes infiniment petites. Je prendrai cette limite, qui s'exprime analytiquement par une intégrale définie, pour la mesure de la surface S; si cette limite est égale à 1, S sera l'unité de surface.

La définition de l'aire d'une surface plane, prise sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes sous lesquelles elle vient d'être présentée, est rapportée à un certain arc de rayon infini

supposé donné. Il reste à faire voir, sans s'appuyer en rien sur la théorie des parallèles, que, *ainsi définie*, l'aire d'une surface plane a toujours même mesure, quel que soit l'arc auquel on la rapporte.

Soit S l'aire d'une surface plane quelconque rapportée à un arc de rayon infini U V (fig. 56, pl. VIII) situé dans le plan de cette surface; soit S' l'aire de la même surface rapportée à un second arc U' V' situé dans le même plan. Je me propose ici de démontrer l'égalité $S' = S$.

Je supposerai l'étendue indéfinie du plan décomposée en zones d'égale hauteur par des arcs de rayon infini parallèles à U V, et je décomposerai ces zones, par des normales, en cases ayant toutes les mêmes bases. Soit m le nombre des cases entièrement contenues dans la surface considérée, et μ le nombre des cases traversées par le contour de cette surface. Quel que soit l'arc auquel on rapporte la mesure des aires, l'aire de la surface considérée sera toujours comprise entre l'aire totale des m cases intérieures, et celle des $m+\mu$ cases qui ont des points communs avec la surface; de plus, lorsque les dimensions des cases deviennent infiniment petites, μ devient négligeable auprès de m. On conclut facilement de là que, pour établir l'égalité $S' = S$, il suffit de démontrer que l'aire de chaque case infinitésimale conserve la même mesure, quel que soit celui des deux arcs U V ou U' V' auquel on la rapporte. Ainsi, $abcd$ figurant une des cases construites, s désignant l'aire de cette case rapportée à l'arc U V, et s' l'aire de la même case rapportée à l'arc U' V', il s'agit uniquement de démontrer que, lorsque les dimensions ab et ac de cette case sont infiniment petites, on a $s' = s$.

Dans les relations entre les différents éléments que j'aurai à considérer, je traiterai directement comme quantités égales entre elles, des quantités qui ne peuvent différer l'une de l'autre que d'une fraction infiniment petite d'elles-mêmes; dans ces mêmes relations, je supposerai toujours toutes les longueurs exprimées numériquement par leur rapport à l'unité de longueur. D'après cela, la hauteur ac étant infiniment petite, je peux poser l'égalité $cd = ab$, qui subsistera encore, si je rem-

place l'arc cd par tout autre arc $c'd'$ parallèle à U V, situé entre ab et cd, et limité aux côtés ac et bd. On a donc, en prenant la définition des aires sous la seconde forme, $s = ab \times ac$.

Soient ae et cf deux arcs parallèles à l'arc U' V', menés par les points a, c, et limités au côté bd ou à son prolongement; soit ag la normale abaissée du point a sur l'arc cf. En menant les cordes ab, ae, cd, cf, on forme deux triangles abe et cdf, qui ont, à la limite, leurs trois angles égaux chacun à chacun; dans ces deux triangles infinitésimaux, les côtés opposés aux angles égaux ont des rapports égaux (ch. Ier, n° 12). Il en sera de même si je remplace les côtés ab, ae, cd, cf par les arcs que ces cordes sous-tendent. Or, le rapport des arcs cd et ab est égal à un; on a donc aussi $\frac{\text{arc } cf}{\text{arc } ae} = 1$, ou arc cf = arc ae. Cette dernière égalité subsistera encore si je remplace l'arc cf par tout autre arc $c'f'$ parallèle à U' V', situé entre les arcs ae et cf, et limité aux côtés ac et ef. On en déduit que l'aire $aecf$, rapportée à l'arc U' V', a pour mesure $ae \times ag$. Or, si je mène la corde cg, les deux triangles acg et abe ont, à la limite, leurs trois angles égaux chacun à chacun; ils ont donc, à la limite, leurs côtés proportionnels; de là l'égalité

$$\frac{\text{corde } ae}{ac} = \frac{\text{corde } ab}{ag}, \text{ ou } \frac{\text{arc } ae}{ac} = \frac{\text{arc } ab}{ag};$$

d'où l'on tire $ae \times ag = ab \times ac$. Cette dernière égalité montre que l'aire $abcd$ rapportée à l'arc U V, aire que j'ai appelée s, est égale à l'aire $aecf$ rapportée à l'arc U' V'; pour achever la démonstration, il ne reste plus qu'à faire voir que, en rapportant les aires à l'arc U' V', l'aire $abcd$, ou s', est égale à l'aire $aecf$.

Je mène différents arcs parallèles à U'V', limités, les uns à l'arc ab et au côté be, les autres à l'arc cd et au côté df; je supposerai que les points de division déterminés sur les arcs ab et cd sont deux à deux sur une même normale commune à ces deux arcs. On démontrera, comme on a démontré plus haut l'égalité arc cf = arc ae, que les arcs menés parallèle-

ment à l'arc U'V' sont égaux deux à deux ; on reconnaîtra en outre, par un raisonnement semblable, qu'ils interceptent des longueurs respectivement égales sur les deux normales $b\,h$ et $d\,l$ abaissées des points b et d sur les arcs $a\,e$ et $c\,f$. On déduit de là, en prenant la définition des aires sous la seconde forme, que les aires $c\,d\,f$ et $a\,b\,e$ rapportées à l'arc U'V' sont égales, c'est-à-dire ne diffèrent l'une de l'autre que d'une fraction infiniment petite d'elles-mêmes.

Je peux toujours supposer que les dimensions $a\,b$ et $a\,c$ sont du même ordre de grandeur : si, en outre, les arcs $a\,e$ et $c\,f$ font avec $a\,c$ un angle fini, l'aire $c\,d\,f$ est de même ordre de grandeur que l'aire $a\,e\,c\,f$, et la différence entre les aires $c\,d\,f$ et $a\,b\,c$, négligeable auprès $c\,d\,f$, est négligeable aussi auprès de $a\,e\,c\,f$. L'aire $a\,e\,c\,f$, rapportée à l'arc U'V', ne sera donc altérée que d'une fraction infiniment petite d'elle-même, si je l'augmente de l'aire $c\,d\,f$, en la diminuant en même temps de l'aire $a\,b\,c$; c'est-à-dire que les deux aires infinitésimales $a\,b\,c\,d$ et $a\,e\,c\,f$, rapportées à l'arc U'V', ont même mesure. Or, la première a pour mesure s' ; il a été démontré plus haut que la mesure de la seconde est égale à s ; on a donc $s' = s$. Cette égalité entraîne, ainsi qu'on l'a vu précédemment, l'égalité $S' = S$. L'aire d'une surface plane est donc un élément géométrique dont la mesure est indépendante de tout système de comparaison.

J'ai supposé que les arcs $a\,e$ et $c\,f$ coupaient $a\,c$ sous des angles finis, c'est-à-dire que sur toute l'étendue de la surface considérée, en quelque point qu'on mène des arcs parallèles à UV et à U'V', ces arcs ne se coupent jamais orthogonalement ; si cette particularité, que j'ai écartée dans le raisonnement précédent, se présente en certains points, on arrive encore à la même conclusion ; en effet, si l'on considère différents éléments superficiels suffisamment petits enveloppant tous ces points, et si l'on compare les aires de chacun de ces éléments, rapportées successivement à l'arc UV, à un arc U''V'' convenablement choisi dans le plan, et enfin à l'arc U'V', les aires rapportées aux arcs UV et U''V'' auront même mesure ; il en sera de même des aires rapportées aux arcs U''V'' et U'V' ;

donc il en est de même aussi des aires rapportées aux arc U V et U′ V′, et la formule $S' = S$ est générale.

De là ce corollaire que les aires de deux figures superposables sont égales.

On remarquera l'analogie qui existe entre la construction de la figure 56, et la construction de la figure sur laquelle on démontre en géométrie élémentaire que tout parallélogramme est équivalent au rectangle de même base et de même hauteur.

XII. L'aire d'une surface plane quelconque étant toujours égale à la somme des aires de tous ses éléments, de quelque manière qu'on décompose une surface plane en éléments infinitésimaux, sa mesure s'obtiendra en faisant la somme des mesures de toutes les aires partielles dont elle se compose. Je considèrerai ici des éléments différentiels infinitésimaux de deux sortes différentes, dont je me propose de déterminer la mesure. Dans le premier des deux cas que j'examinerai, l'élément superficiel est compris entre deux circonférences concentiques, dont les rayons diffèrent infiniment peu l'un de l'autre; dans le second cas, l'élément superficiel est un triangle infinitésimal.

1° Soient deux circonférences concentriques, ayant pour rayons R et $R+z$; je me propose de déterminer la mesure de l'aire comprise entre ces deux circonférences, lorsque z est infiniment petit. Je conçois cette surface décomposée en fractions infiniment petites d'elle-même par des rayons qui partagent chaque circonférence en arcs infinitésimaux du même ordre de grandeur que z, ou d'un ordre plus élevé. Soit $abcd$ (fig. 57, pl. VIII) un des éléments ainsi formés. J'en rapporte l'aire à un arc de rayon infini uv normal à ac. Par les sommets a, b, c, d je mène les arcs al, bm, cn, dp parallèles à uv et limités aux côtés ac et bd, ou à leurs prolongements. Les dimensions ab et ac étant infiniment petites, les longueurs de tous ces arcs, ainsi que celle de tout arc intermédiaire mené parallèlement à uv et compris entre les côtés ab et cd ou leurs prolongements, peuvent être considérées comme égales à ab. Les aires $mcnb$ et $apdl$ ont donc pour mesure la première $ab \times cm$, la seconde

$ab \times ap$. L'aire $abcd$ est moindre que la première et plus grande que la seconde ; sa mesure est donc comprise entre $ab \times cm$ et $ab \times ap$. Or, l'arc ab étant, par construction, un infiniment petit du même ordre au moins que z ou ac, les longueurs ap et bn ne diffèrent de z que d'une fraction infiniment petite d'elles-mêmes ; il en résulte que l'aire infinitésimale $abcd$ a pour mesure $ab \times z$. Appliquant cette formule aux aires des différents éléments dont se compose la surface comprise entre les deux circonférences, on obtient pour la mesure de cette surface, le produit circ R $\times z$.

2° Soit un triangle infinitésimal ABC (fig. 58, pl. VIII) que je supposerai rectangle en A ; un au moins des deux angles aigus, B par exemple est fini. Je construis dans le plan de la figure, et, par rapport à la droite BC, du côté opposé au triangle, l'angle CBA' égal à l'angle BCA, et j'achève la construction du triangle A'BC égal au triangle ABC. Je détermine l'aire du quadilatère ABA'C, qui est double de l'aire du triangle, en la rapportant à un arc de rayon infini normal à AC. Par un raisonnement semblable à celui qui est développé au paragraphe précédent, on démontrera que, le côté AB étant un infiniment petit du même ordre que AC ou d'un ordre supérieur, l'aire du quadrilatère ABA'C a pour mesure AB $\times$ AC ; l'aire du triangle rectangle infinitésimal ABC, qui en est la moitié, a donc pour mesure $\frac{1}{2}$ AB $\times$ AC, ou la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

Un triangle quelconque, dont la base est b et la hauteur h, est la somme ou la différence de deux triangles rectangles qui ont pour hauteur h, et dont les bases ont pour somme ou pour différence b. Il résulte de là qu'un triangle infinitésimal quelconque a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

XIII. De la mesure du triangle infinitésimal, et du théorème relatif aux projections énoncé au n° IV, se déduit le corollaire suivant :

L'aire de la projection orthogonale d'un triangle sur un plan quelconque ne peut être plus grande que l'aire de ce triangle ;

en outre, si le plan du triangle et le plan de projection se coupent suivant un angle fini, la différence entre les deux aires a avec l'aire du triangle un rapport fini.

XIV. Une surface plane S, limitée à un contour polygonal fermé quelconque, est moindre que toute surface polyèdrale limitée au même contour.

En effet, chaque face peut être décomposée en éléments triangulaires infiniment petits ; la projection de ces éléments sur le plan de la surface S couvre entièrement cette surface. Or, les faces adjacentes à S se composent d'éléments qui tous ont avec leur projection un rapport surpassant l'unité d'une quantité finie (n° XIII), la superficie de ces faces surpasse donc celle de leurs projections; d'ailleurs la différence entre l'aire des autres faces et celle de leurs projections ne peut pas être en sens contraire; donc l'aire plane S est moindre que celle de toute surface polyèdrale limitée au même contour.

XV. Soit ABC (fig. 59, pl. VIII) un triangle infinitésimal dont les trois angles sont finis. A partir des deux sommets B et C, dans le plan du triangle, ou dans un plan quelconque mené par la droite BC, je trace suivant des directions arbitraires deux éléments rectilignes BB′, CC′ infiniment petits par rapport aux côtés du triangle; je joins par une ligne droite les points B′ et C′ et je dis que l'aire BCC′B′ est une fraction infiniment petite de l'aire du triangle ABC.

En effet, les trois angles de ce triangle étant finis, les trois côtés, et les trois perpendiculaires abaissées des trois sommets sur les côtés opposés sont des infiniment petits du même ordre de grandeur, soit de l'ordre n (v. chap. Ier, nos 4 et 6). L'aire du triangle ABC, qui a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur, est donc de l'ordre $2n$.

Je décompose le quadrilatère BCC′B′ en deux triangles par la diagonale BC′; je prends pour bases de ces triangles les côtés BB′ et CC′, qui, par hypothèse, sont des infiniment petits d'un ordre supérieur à n; les hauteurs, au plus égales à BC et à

BC', ne peuvent être d'un ordre inférieur à n; l'aire de chacun des deux triangles BCC', C'BB' est donc un infiniment petit d'un ordre supérieur à 2 n. Donc enfin la somme de ces deux aires, ou l'aire BCC'B' est une fraction infiniment petite de l'aire du triangle ABC.

Aire d'une surface courbe.

XVI. Soit S une surface quelconque, ou l'un des éléments suivant lesquels la surface sera décomposée s'il y a lieu, cette décomposition étant effectuée de telle sorte que chacune des parties, dont la réunion forme la surface proposée, remplisse les diverses conditions auxquelles je supposerai la surface S assujettie dans l'exposé qui suit (cette décomposition sera d'ailleurs toujours possible).

Je suppose d'abord la surface S telle que toute droite issue d'un point O convenablement choisi (fig. 60, pl. VIII), et qui peut être à l'infini, ne la rencontre qu'une fois. J'imagine inscrites dans S une suite indéfinie de surfaces polyédrales à faces triangulaires, les faces étant disposées de telle sorte que les tétraèdes dont elles forment les bases, et qui ont le point O pour sommet commun, soient tous extérieurs l'un à l'autre. Je supposerai que dans cette suite indéfinie de surfaces polyédrales, toutes les arêtes deviennent infiniment petites, et que, en même temps, les trois angles de chaque face restent finis; je supposerai, de plus, que les contours polygonaux qui limitent les surfaces polyédrales successives ont leurs sommets sur le contour même de la surface S, ou à une distance de ce contour qui décroît au delà de toute limite.

Soit ABC une face triangulaire appartenant à l'une des surfaces polyédrales inscrites; les trois angles étant finis, les côtés sont des infiniment petits du même ordre de grandeur, soit du premier ordre. Je mène par le point O les plans contenant les côtés AB, AC, BC; les faces de l'angle tièdre ainsi formé coupent la surface S suivant trois arcs infinitésimaux sous-tendus

par les cordes AB, AC, BC; j'admettrai que ces arcs sont coupés sous des angles finis par les droites OA, OB, OC. Il arrivera généralement, d'après le corolaire du n° IX, que tous les points de ces arcs seront à une distance infiniment petite du second ordre au moins de leurs cordes; je supposerai que cette dernière condition se trouve toujours remplie pour toutes les arêtes des surfaces polyédrales inscrites dans S (1).

Je dis que l'aire totale de ces surfaces polyédrales a une li-

(1) La décomposition de la surface proposée en éléments réunissant les conditions auxquelles la surface S est assujettie, et l'inscription des surfaces polyédrales successives dans S, peuvent se faire, par exemple, en procédant conformément à la méthode suivante, dans laquelle je suppose le point O, qui peut être pris arbitrairement, situé à l'infini sur une normale à une surface de rayon infini Σ, du côté de la concavité de cette surface.

1° Décomposer, s'il y a lieu, la surface proposée en nappes telles que chacune d'elles ne puisse être coupée qu'en un seul point par une normale à Σ.

2° Tracer sur Σ trois sections normales U, U′, U″, se coupant réciproquement. Déplacer la section U parallèlement à elle-même, d'un mouvement continu. Le plan de cette section déterminera sur chaque nappe une suite continue de courbes; les points s'il en existe, où ces courbes n'ont pas une tangente déterminée unique, étant des points isolés sur chaque courbe, ne peuvent former sur la surface proposée que des points isolés ou des lignes isolées. Décomposer, s'il y a lieu, et selon le cas, chaque nappe suivant ces lignes, ou suivant des lignes passant par ces points isolés. Si sur les courbes de section de la surface proposée, la tangente se confond en certains points avec la normale à Σ, isoler les parties de la surface voisine de ces points, pour les rapporter à d'autres surfaces de rayon infini.

Opérer avec les deux sections normales U′ et U″, comme il a été fait avec la section U.

S est l'une quelconque des parties de la surface ainsi décomposée, en exceptant celles de ces parties qui en ont été isolées pour être rapportées à des surfaces de rayon infini autres que Σ.

3° Tracer sur Σ un réseau de triangles, tous égaux entre eux, déterminés par trois groupes de sections normales, parallèles, les unes à U, les autres à U′, et celles du troisième groupe à U″. Les plans de ces sections normales déterminent sur S un réseau qui marquera les sommets d'une surface polyédrale inscrite dans S. Lorsque les côtés des triangles tracés sur Σ, côtés qui restent toujours parallèles aux sections normales U, U′, U″, deviendront infiniment petits, il en sera de même des arêtes du polyèdre inscrit dans S; de plus, les angles de chaque face resteront finis, et toutes les conditions dans lesquelles je me suis placé au n° XVI se trouveront remplies.

mite déterminée, indépendante de la loi suivant laquelle sont construites les diverses surfaces polyédrales (pourvu que les conditions auxquelles je les ai supposées soumises soient observées), et indépendante de la position du point O.

Pour le démontrer, sur les droites OA, OB, OC, et sur leurs prolongements, je prends de part et d'autre de chacun des sommets A, B, C, dés points a, a', b, b', c, c', situés à des distances de ces sommets infiniment petites du second ordre, et telles que les arcs infinitésimaux déterminés par l'intersection des faces de l'angle trièdre O et de la surface S soient entièrement à l'intérieur des quadrilatères $aa'bb'$, $bb'cc'$, $aa'cc'$, formés en joignant deux à deux ceux de ces points situés d'un même côté de la face ABC. Quelle que soit une autre surface polyédrale inscrite dont toutes les arêtes soient des infiniment petits d'un ordre suffisamment élevé, les faces qui traversent les plans OAB, OAC, OBC, les couperont suivant des éléments rectilignes entièrement situés à l'intérieur des trois quadrilatères. Si donc j'ajoute ces quadrilatères aux faces ou portions de faces comprises dans l'angle trièdre O, l'aire totale sera plus grande que celle du triangle ABC (n° XIV). Or, l'aire totale des trois quadrilatères est une fraction infiniment petite de celle du triangle (n° XV) ; il en résulte que le rapport limite entre les aires des faces comprises dans l'angle trièdre O, et l'aire du triangle ABC ne peut être moindre que l'unité. Si, le point O restant le même, je répète le même raisonnement sur d'autres faces triangulaires infinitésimales, la même conclusion pourra être étendue à des superficies finies.

Ainsi, après avoir inscrit dans S la suite de surfaces polyédrales à laquelle la face ABC est empruntée, et dont les aires tendent vers une certaine limite L, quelle que soit la loi suivant laquelle on inscrira dans S d'autres surfaces (les conditions auxquelles j'ai supposé ces surfaces soumises restant observées, et le point O pouvant d'ailleurs être pris dans une nouvelle position quelconque), la limite L' vers laquelle tendront les aires de ces surfaces ne peut être moindre que L. Par la même raison, L ne peut être moindre que L' ; ces deux limites

sont donc égales ; donc, en général, la limite des aires des surfaces polyédrales inscrites est déterminée (1).

C'est par cette limite qu'est définie l'aire de la surface S.

Corollaire I. Si une surface courbe est décomposée en plusieurs éléments, l'aire de la surface entière est un *tout*, dont les aires des divers éléments sont les différentes *parties*.

Corollaire II. L'aire d'une surface plane est moindre que l'aire de toute surface terminée au même contour.

XVII. Sur une surface de rayon infini, les aires se détermineront par les mêmes raisonnements au moyen desquels on établit en géométrie élémentaire la mesure des superficies planes, et s'exprimeront au moyen de formules semblables, en substituant partout aux lignes droites du plan les sections normales de la surface de rayon infini. (Voir les propriétés de ces sections normales, Ch. III, n° 49).

Mesure des volumes.

XVIII. Je conçois l'espace indéfini décomposé en éléments solides tels que M N (fig. 61, pl. VIII), tous identiques entre eux, et disposés, comme par assises, sur des surfaces de rayon infini parallèles à une même surface R ; ces surfaces, que je suppose menées de telle sorte qu'elles interceptent sur une quelconque de leurs normales communes des divisions égales d'une longueur h, limitent chaque élément dans le sens de sa hauteur. Je suppose les faces par lesquelles les éléments d'une même

(1) On obtiendra encore la même limite, si, à chaque face telle que A B C, on substitue le triangle infinitésimal compris dans le même angle trièdre O, et situé dans le plan tangent à la surface mené en un point pris à l'intérieur de cet angle trièdre (voir, pour l'existence du plan tangent, Ch. IV, n° 94).

assise, c'est-à-dire ceux compris entre deux mêmes surfaces de rayon infini, sont en contact, formées par deux séries de plans normaux, qui déterminent sur chacune des deux surfaces des sections normales telles que celles d'une série soient parallèles entre elles, et perpendiculaires à celles de l'autre série.

Les éléments formant une même assise auront tous une même hauteur égale à h, et auront à l'une des bases, celle par exemple qui est située par rapport à l'autre du côté de la concavité, les mêmes dimensions a et b. J'imagine toutes les assises formées d'éléments identiques qui auront tous la hauteur h, et les dimensions a et b à la base.

Pour comparer les volumes de deux solides V et V', je comparerai les nombres n et n' des éléments ainsi formés qui y sont entièrement contenus; en suivant la marche tracée au n° XI (*aire d'une courbe plane*), on démontrera que si les divisions a, b, h des éléments deviennent infiniment petites, le nombre des éléments traversés par les surfaces qui enveloppent les solides V et V' devient négligeable auprès des nombres n et n'; et que, en outre, le rapport $\frac{n}{n'}$ tend vers une limite déterminée indépendante de la loi suivant laquelle décroissent les dimensions des éléments, les surfaces qui limitent les différentes assises étant supposées, quant à présent, toujours parallèles à la surface R. C'est par la limite de ce rapport que je définis le rapport des volumes V et V'; ainsi, le volume V étant pris pour unité, le volume V' a pour mesure lim. $\frac{n'}{n}$ (on verra plus loin que cette mesure est indépendante de la position de la surface R). Remarquons de suite que le volume d'un solide composé de plusieurs autres est, d'après cette définition, un *tout* dont les volumes des solides partiels forment les différentes *parties*.

La même définition peut être présentée sous une seconde forme équivalente à la première :

Soient R' et R'' deux surfaces parallèles à R, qui, touchant la

surface d'un solide V, laissent ce solide tout entier, l'une du coté de sa concavité, l'autre du côté de sa convexité. Soient r_1 r_2..... r_p, différentes surfaces intermédiaires parallèles à R; je désigne par s_1, s_2..... s_p, les étendues superficielles mesurées sur ces surfaces (n° XVII) à l'intérieur du volume V; soient enfin, z_1, z_2..... z_p, z_{p+1}, les distances successives qui séparent les surfaces R, r_1, r_2 ..... r_p, R'. Il résulte de la définition donnée précédemment, que le volume du solide V est proportionnel à la limite vers laquelle tend la somme $s_1 z_1 + s_2 z_2 .... + s_p z_p$, lorsque les hauteurs z_1, z_2 ..... z_p, z_{p+1} deviennent toutes infiniment petites; si cette limite est égale à 1, le volume V sera l'unité de volume.

On peut déduire de là que, si les dimensions a, b, h de l'élément MN sont infiniment petites, cet élément a pour mesure $a \times b \times h$.

La définition de la mesure d'un volume, telle qu'elle vient d'être présentée, est rapportée à une certaine surface de rayon infini supposée donnée. On démontrera, par un raisonnement analogue à celui déjà exposé au n° XI, et en suivant une marche semblable à celle qui conduit, en géométrie élémentaire, à la mesure du parallèlipipède, que la mesure des volumes, telle qu'elle a été définie, reste la même, quelle que soit la surface de rayon infini à laquelle on la rapporte. Le volume d'un solide est donc un élément géométrique dont la mesure est indépendante de tout système de comparaison.

De là ce corollaire que, dans la géométrie imaginaire comme dans la géométrie vraie, deux solides superposables ont même volume.

XIX. En résumé, toutes les propositions de géométrie qu'on peut démontrer sans s'appuyer sur la théorie des parallèles, sont implicitement contenues dans les trois propositions *A*, *B*, *C* du n° I de ce chapitre; ainsi se trouvent justifiées les conclusions des chapitres II et III.

Il me reste, pour terminer ce chapitre, à analyser une démonstration exposée à l'Académie des sciences, à la séance du 20 décembre 1869, par laquelle M. Carton a essayé d'établir *a priori* que la somme des trois angles d'un triangle rectiligne est égale à deux angles droits, et à faire voir que cette démonstration sous-entend un postulatum.

XX. *De la démonstration proposée par M. Carton, du théorème de géométrie élémentaire relatif à la somme des trois angles d'un triangle rectiligne* (1).

Cette démonstration repose sur trois lemmes établis en toute rigueur, et qui se résument dans la proposition suivante:

Soient deux droites L, L' perpendiculaires à une troisième, et soit un point P se déplaçant sur la droite L, en s'éloignant constamment de la perpendiculaire commune; la distance du point P à la droite L' est, ou bien constante, ou bien toujours croissante.

Cette proposition étant admise, j'exposerai sommairement ainsi qu'il suit la démonstration proposée par M. Carton, et je rechercherai quel est le postulatum que, d'après la conclusion du chapitre III, cette démonstration doit nécessairement sous-entendre.

Soit une suite de n triangles égaux à un même triangle T, dont les bases, situées sur une même droite indéfinie A Y (fig. 62, pl. VIII), déterminent sur cette droite une suite continue de segments égaux AB, BB_1, B_1B_2,..... $B_{n-2}B_{n-1}$. Joignant par des droites les sommets C, C_1, C_2..... $C_{n-2}C_{n-1}$, on forme une ligne CC_1C_2..... $C_{n-2}C_{n-1}$, qui est ou droite ou brisée. Soit CP la perpendiculaire abaissée du point C sur AB, et soit KX la perpendiculaire sur CP élevée en un point K pris sur le prolongement de cette droite au delà du point C; cette perpen-

(1) Voir le compte rendu de la séance du 20 décembre 1869 à l'Académie des sciences, p. 1265 à 1269.

diculaire laisse entièrement d'un même côté la ligne CC_1C_2..... C_{n-1}. Sur les droites CC_1, C_1C_2,.... $C_{n-2}C_{n-1}$, on peut construire une suite de triangles CDC_1, $C_1D_1C_2$,..... $C_{n-2}D_{n-2}C_{n-1}$, dont les sommets D, D_1, D_2..... D_{n-2} situés sur la droite K X sont pris à des distances de plus en plus grandes du point K. La figure 62, ainsi construite, représente dans son ensemble un hexagone $ACDD_{n-2}C_{n-1}B_{n-1}$ composé de $4n-4$ triangles, dont n sont égaux au triangle T.

Cela posé, et l'angle droit étant pris pour unité d'angle, soit $2-\alpha$ la somme des angles du triangle T (on sait que cette somme ne peut excéder 2 angles droits, et que, par conséquent, α ne peut être négatif); la somme de tous les angles dans les n triangles égaux sera $2n-n\alpha$. Dans les $3n-4$ autres triangles, la somme des angles, qui ne peut excéder $6n-8$, pourra être mise sous la forme $6n-8-x$, x étant positif ou nul. Or, si de la somme totale $2n-n\alpha+6n-8-x$ on retranche tous les angles dont le sommet ne coïncide pas avec un sommet de l'hexagone, il reste, pour la somme des angles de cet hexagone :

$$2n-n\alpha+6n-8-x-4(n-2)-2(n-1)-2(n-3),$$

ou, toute réduction faite,

$$8-n\alpha-x.$$

Si α, qui, ainsi que x, ne peut être négatif, n'est pas nul, n peut être pris assez grand pour que cette expression devienne négative; la somme des angles de l'hexagone serait alors moindre que zéro, ce qui serait absurde.

Ce raisonnement admis, il s'ensuivra que α est nécessairement nul et que la somme des trois angles du triangle T est précisément égale à deux angles droits; mais on a le droit de se demander si, quel que soit le nombre n de triangles égaux qu'on construira, la figure présentera toujours la disposition nécessaire au raisonnement.

Pour préciser cette objection, je suppose qu'il soit possible d'élever sur la droite A Y, suffisamment prolongée, une perpendiculaire S T (fig. 63, pl. VIII) ne rencontrant pas K X. Je peux supposer, au même titre, que la ligne CC_1C_2....., composée

d'éléments rectilignes qui, dans l'hypothèse où je me place, formeraient une ligne brisée, fournira dans l'angle T S Y, si le nombre des sommets $C, C_1, C_2 \ldots\ldots$ est suffisamment grand, des éléments tels que $C_p C_{p+1}$ dont les prolongements ne rencontreraient jamais S T. S'il pouvait en être ainsi, les deux triangles $C_p C_{p+1} D_p$ et $C_p C_{p+1} B_p$, au lieu d'être, comme le raisonnement précédent le supposait, et comme le représente la figure 62, situés de part et d'autre du côté $C_p C_{p+1}$, se trouveraient être situés d'un même côté de leur base commune, comme le représente la figure 63, et le raisonnement précédent cesserait dès lors d'être applicable.

Ainsi, ce raisonnement suppose implicitement que les deux triangles qui, d'après la construction, ont pour base commune l'un des côtés $C C_1$, $C_1 C_2, \ldots C_{n-1} C_{n-2}$, sont toujours situés de part et d'autre de leur côté commun. Cette proposition n'est nullement démontrée, et elle équivaut au postulatum suivant :

Si deux droites L et L' sont perpendiculaires à une troisième, toute perpendiculaire à L, suffisamment prolongée, rencontre L'.

DÉVELOPPEMENT DES CALCULS

INDIQUÉS DANS LES CHAPITRES II ET III.

Tableau A.

(*Renvoi du n° 26.*)

Intégration de l'équation différentielle

$$e^{\frac{2z}{k}} + 2z'^2 - kz'' = o,$$

dans laquelle z' et z'' représentent les dérivées première et seconde $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ de la fonction z.

Soit $e^{\frac{2z}{k}} = \eta$; on a $\frac{d\eta}{dx} = \frac{2z'}{k}\eta$; $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{2z''\eta}{k} + \frac{4z'^2\eta}{k^2}$;

d'où : $z' = \frac{k}{2\eta}\frac{d\eta}{dx}$; $z'' = \frac{k}{2\eta^2}\left(\eta\frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{d\eta^2}{dx^2}\right)$.

L'équation à intégrer devient : $\eta + \frac{k^2}{2\eta^2}\left(\frac{d\eta^2}{dx^2} - \eta\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d\eta^2}{dx^2}\right) = o$,

ou : $$2\eta^3 + 2k^2\frac{d\eta^2}{dx^2} - k^2\eta\frac{d^2\eta}{dx^2} = o.$$

Soit $\frac{d\eta}{dx} = p$, d'où $\frac{d^2\eta}{dx^2} = p\,\frac{dp}{d\eta}$. L'équation devient :

$$2\eta^3 + 2k^2p^2 - k^2\eta p\,\frac{dp}{d\eta} = o.$$

Je pose $p^2 = q$; d'où $p\,\frac{dp}{d\eta} = \frac{1}{2}\,\frac{dq}{d\eta}$; l'équation à intégrer prend la forme : $2\eta^3 + 2k^2q - \frac{k^2\eta}{2}\,\frac{dq}{d\eta} = o$, ou :

$$\frac{dq}{d\eta} - \frac{4q}{\eta} - \frac{4\eta^2}{k^2} = o,$$

équation linéaire du premier ordre qu'on sait intégrer. On en tire, en désignant par C une constante arbitraire :

$$q = e^{+\int\frac{4\,d\eta}{\eta}}\left(C + \int\frac{4\eta^2}{k^2}\,e^{-\int\frac{4\,d\eta}{\eta}}\,d\eta\right)$$

ou $q = \eta^4\left(C + \int\frac{4\,d\eta}{k^2\eta^2}\right) = \eta^4\left(C - \frac{4}{k^2\eta}\right)$, d'où

$$p\left[= \frac{d\eta}{dx}\right] = \eta^2\sqrt{C - \frac{4}{k^2\eta}}\ ;\ \text{d'où } dx = \frac{d\eta}{\eta^2\sqrt{C - \frac{4}{k^2\eta}}}$$

ou, en mettant C sous la forme $\frac{A^2}{k^2}$,

$$dx = \frac{k\,d\eta}{A\eta\sqrt{\eta^2 - \frac{4\eta}{A^2}}}\ ;$$

d'où, en intégrant :

$$x = P - \frac{2k}{\sqrt{A^2\eta^2 - 4\eta} - A\eta}.$$

On en tire :

$$(x - P)\sqrt{A^2 n^2 - 4n} = A n (x - P) - 2k.$$

J'élève les deux membres au carré ; il vient :

$$(x - P)^2 (A^2 n^2 - 4n) = A^2 n^2 (x - P)^2 + 4k^2 - 4 A k n (x - P),$$

ou :

$$k^2 - A k n (x - P) + n (x - P)^2 = o,$$

d'où :

$$n \left[= e^{\frac{2x}{k}}\right] = \frac{k^2}{(x - P)(A k - x + P)}.$$

Si l'on désigne la somme arbitraire $A k + P$ par la lettre Q, l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$(x - P)(x - Q) = - k^2 e^{-\frac{2x}{k}}.$$

Tableau B.

(*Renvoi du n° 32.*)

Elimination des lettres P et Q entre les trois équations :

$$\left\{\begin{array}{ll} (x - P)(x - Q) = - k^2 t^{-2}, & (1) \\ (\alpha - P)(\alpha - Q) = - k^2 \theta^{-2}, & (2) \\ \dfrac{x - P}{x - Q} \times \dfrac{\alpha - Q}{\alpha - P} = e^{\pm \frac{2R}{k}}. & (3) \end{array}\right.$$

Des équations (1) et (2) je tire :

$$t^2 (x - P)(x - Q) = \theta^2 (\alpha - P)(\alpha - Q). \qquad (4)$$

Je désigne la double expression $e^{\pm \frac{R}{k}}$ par la lettre h ; l'équation (3) peut s'écrire :

$$\frac{x-P}{x-Q} = h^2 \frac{\alpha - P}{\alpha - Q} . \qquad (5)$$

Multipliant et divisant membre à membre les équations (4) et (5), on obtient les équations suivantes :

$$t^2 (x-P)^2 = \theta^2 h^2 (\alpha - P)^2, \text{ et } t^2 (x-Q)^2 = \frac{\theta^2}{h^2} (\alpha - Q)^2 ;$$

d'où, en extrayant les racines :

$$t(x-P) = \pm \theta h (\alpha - P), \text{ et } t(x-Q) = \pm \frac{\theta}{h} (\alpha - Q) .$$

Or, α et x sont compris entre P et Q, d'où il suit que $x-P$ et $\alpha - P$ sont de même signe; il en est de même de $x-Q$ et $\alpha - Q$. D'après cela, dans les deux dernières équations, les seconds membres doivent être affectés du signe $+$. On en tire :

$$P = \frac{tx - \theta h \alpha}{t - \theta h}, \quad \text{et } Q = \frac{tx - \frac{\theta \alpha}{h}}{t - \frac{\theta}{h}},$$

d'où :

$$\alpha - P = \frac{t(\alpha - x)}{t - \theta h}, \text{ et } \alpha - Q = \frac{t(\alpha - x)}{t - \frac{\theta}{h}} .$$

Je reporte ces valeurs dans l'équation (2), en remplaçant h par $e^{+\frac{R}{k}}$, et $\frac{1}{h}$ par $e^{-\frac{R}{k}}$, ou inversement; il vient, de toute manière, pour résultat de l'élimination, l'équation suivante :

$$t^2 (x-\alpha)^2 = -\frac{k^2}{\theta^2} \left(t - \theta e^{-\frac{R}{k}}\right)\left(t - \theta e^{+\frac{R}{k}}\right) .$$

Tableau C.

(*Renvoi du n° 37.*)

Elimination des lettres X_1, T_1, P entre les cinq équations :

$$\left\{\begin{array}{ll} T_1^2 (X_1 - \alpha)^2 = k^2 \left(\dfrac{T_1}{\rho} - 1\right), & (1) \\ (X_1 - \alpha)(X_1 - P) = - k^2 T_1^{-2}, & (2) \\ (x - \alpha)(x - P) = - k^2 t^{-2}, & (3) \\ t'^2 = \dfrac{x - \alpha}{x - P} \cdot \dfrac{X_1 - P}{X_1 - \alpha}, & (4) \\ x' = T_1 (X_1 - \alpha) - T_0 (X_0 - \alpha). & (5) \end{array}\right.$$

Des équations (1) et (2) je tire $\dfrac{T_1}{\rho} - 1 = - \dfrac{X_1 - \alpha}{X_1 - P}$, ou

$T_1 = \rho \dfrac{\alpha - P}{X_1 - P}$.

Je reporte cette valeur dans les équations (2) et (5) ; il vient :

$$X_1 - \alpha = - \frac{k^2}{\rho^2} \cdot \frac{X_1 - P}{(\alpha - P)^2}, \qquad (6)$$

et

$$x' = \rho (\alpha - P) \frac{X_1 - \alpha}{X_1 - P} - T_0 (X_0 - \alpha). \qquad (7)$$

De l'équation (3) je tire

$$x - P = - \frac{k^2}{t^2 (x - \alpha)}, \qquad (8)$$

d'où :

$$\alpha - P = - \frac{k^2 + t^2 (x - \alpha)^2}{t^2 (x - \alpha)}. \qquad (9)$$

De l'équation (6) je tire $\frac{X_1 - P}{X_1 - \alpha} = - \frac{\rho^2 (\alpha - P)^2}{k^2}$, ou, eu égard à l'équation (9) :

$$\frac{X_1 - P}{X_1 - \alpha} = - \frac{\rho^2}{k^2} \left[\frac{k^2 + t^2 (x - \alpha)^2}{t^2 (x - \alpha)}\right]^2. \qquad (10)$$

Je porte dans les équations (4) et (7) les valeurs de $\alpha - P$, de $x - P$ et de $\frac{X_1 - P}{X_1 - \alpha}$ données par les équations (8), (9) et (10) ;

il vient, d'une part :

$$t'^2 = \frac{t^2 (x - \alpha)^2}{k^2} \times \frac{\rho^2}{k^2} \left[\frac{k^2 + t^2 (x - \alpha)^2}{t^2 (x - \alpha)}\right]^2 = \frac{\rho^2}{k^2} \left[\frac{k^2 + t^2 (x - \alpha)^2}{k t}\right]^2 .$$

ou

$$t' = \frac{\rho}{k^2 t} \left[k^2 + t^2 (x - \alpha)^2\right] ,$$

et, d'autre part :

$$x' = \frac{k^2 t^2 (x - \alpha)}{\rho \left[k^2 + t^2 (x - \alpha)^2\right]} - T_0 (X_0 - \alpha) .$$

Tableau D.

(Renvoi du n° 38.)

Vérifier, sur les équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' = \dfrac{k^2 t^2 (x - \alpha)}{\rho \left[k^2 + t^2 (x - \alpha)^2\right]} - T_0 (X_0 - \alpha) , & (1) \\[2ex] t' = \dfrac{\rho}{k^2 t} \left[k^2 + t^2 (x - \alpha)^2\right] , & (2) \end{array} \right.$$

la relation

$$t'^2\,dx'^2 + k^2\,\frac{d\,t'^2}{t'^2} = t^2\,d\,x^2 + \frac{k^2\,d\,t^2}{t^2}.$$

De l'équation (1) on tire :

$$d\,x' = \frac{k^2}{\rho} \times \frac{t^2\,[k^2 - t^2\,(x-\alpha)^2]\,d\,x + 2\,t\,k^2\,(x-\alpha)\,d\,t}{[k^2 + t^2\,(x-\alpha)^2]^2},$$

d'où, eu égard à la valeur de t' donnée par l'équation (2) :

$$t'\,d\,x' = \frac{t^2\,[k^2 - t^2\,(x-\alpha)^2]\,d\,x + 2\,t\,k^2\,(x-\alpha)\,d\,t}{t\,[k^2 + t^2\,(x-\alpha)^2]}.$$

De l'équation (2) on tire :

$$d\,t' = \frac{\rho}{k^2}\,.\,\frac{2\,t^3\,(x-\alpha)\,d\,x + [\,t^2\,(x-\alpha)^2 - k^2]\,d\,t}{t^2},$$

et, par suite,

$$\frac{d\,t'}{t'} = \frac{2\,t^3\,(x-\alpha)\,d\,x + [t^2\,(x-\alpha)^2 - k^2]\,d\,t}{t\,[k^2 + t^2\,(x-\alpha)^2]}.$$

On a ainsi :

$$t'^2\,dx'^2 + k^2\,\frac{d\,t'^2}{t'^2}$$

$$= \frac{t^4\left\{[k^2 - t^2(x-\alpha)^2]^2 + 4\,k^2\,t^2(x-\alpha)^2\right\}dx^2 + k^2\left\{4\,k^2\,t^2(x-\alpha)^2 + [t^2\,(x-\alpha)^2 - k^2]^2\right\}dt^2}{t^2\,[\,k^2 + t^2\,(x-\alpha)^2\,]^2},$$

ou

$$t'^2\,d\,x'^2 + k^2\,\frac{d\,t'^2}{t'^2} = \frac{[k^2 + t^2\,(x-\alpha)^2]^2\,(t^4\,d\,x^2 + k^2\,d\,t^2)}{t^2\,[\,k^2 + t^2\,(x-\alpha)^2]^2},$$

ou, enfin,

$$t'^2\,dx'^2 + k^2\,\frac{d\,t'^2}{t'^2} = t^2\,d\,x^2 + k^2\,\frac{d\,t^2}{t^2}.$$

Tableau E.

(*Renvoi du n° 56*).

Elimination des lettres m, n, P, Q entre les cinq équations :

$$\left\{\begin{array}{ll} y = m\,x + n\,, & (1) \\ (m^2+1)(x-\mathrm{P})(x-\mathrm{Q}) = -k^2\,t^{-2}\,, & (2) \\ \beta = m\,\alpha + n\,, & (3) \\ (m^2+1)(\alpha-\mathrm{P})(\alpha-\mathrm{Q}) = -k^2\,\theta^{-2}\,, & (4) \\ \dfrac{x-\mathrm{P}}{x-\mathrm{Q}}\cdot\dfrac{\alpha-\mathrm{Q}}{\alpha-\mathrm{P}} = e^{\pm\frac{2\mathrm{R}}{k}}\,. & (5) \end{array}\right.$$

Si l'on divise par m^2+1 les deux membres des équations (2) et (4), on reconnaît que ces deux équations et l'équation (5) ne diffèrent des trois équations du n° 32 (v. tableau B) qu'en ce que k^2 est remplacé par $\dfrac{k^2}{m^2+1}$, dans tous les termes rationnels en k, l'exponentielle $e^{\pm\frac{2\mathrm{R}}{k}}$ ne subissant aucune modification. Le résultat de l'élimination des lettres P et Q entre ces équations se déduira du résultat obtenu au tableau B, en remplaçant k^2 par $\dfrac{k^2}{m^2+1}$ dans les termes rationnels en k, sans modifier les exponentielles, qui ne fournissent, dans le calcul, aucune réduction avec ces termes. Il vient ainsi l'équation :

$$t^2\,(x-\alpha)^2\,(m^2+1) = -\frac{k^2}{\theta^2}\left(t-\theta\,e^{-\frac{\mathrm{R}}{k}}\right)\left(t-\theta\,e^{+\frac{\mathrm{R}}{k}}\right). \quad (6)$$

Des équations (1) et (3) je tire : $m = \dfrac{y-\beta}{x-\alpha}$, d'où :

$$m^2+1 = \frac{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}{(x-\alpha)^2}\,.$$

Je porte cette valeur dans l'équation (6) et il vient :

$$t^2\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]=-\frac{k^2}{\theta^2}\left(t-\theta e^{-\frac{R}{k}}\right)\left(t-\theta e^{+\frac{R}{k}}\right).$$

Tableau F.

(Renvoi du n° 58)

Elimination des lettres H et λ entre les trois équations :

$$\begin{cases} y'=\lambda x', & (1)\\ (\lambda^2+1)\,x'\,(x'-H)=-k^2t^{-2}, & (2)\\ (\lambda^2+1)\,(n'-H\lambda+Hm)\,n'=(m^2+1)\,(n'-P'\lambda+P'm)\,(n'-Q'\lambda+Q'm). & (3)\end{cases}$$

L'équation (1) donne : $\lambda=\dfrac{y'}{x'}$.

L'équation (2) donne : $x'-H=-\dfrac{k^2t^{-2}}{(\lambda^2+1)\,x'}$,

d'où : $H=x'\left[1+\dfrac{k^2t^{-2}}{(\lambda^2+1)\,x'^2}\right]$.

Remplaçant, dans l'expression de H, λ par sa valeur $\dfrac{y'}{x'}$, on a :

$$H=x'\left(1+\frac{k^2t^{-2}}{x'^2+y'^2}\right).$$

Je reporte les valeurs de H et de λ dans l'équation (3) ; il vient :

$$\frac{x'^2+y'^2}{x'^2}\left[n'+\left(1+\frac{k^2t^{-2}}{x'^2+y'^2}\right)\left(mx'-y'\right)\right]$$

$$=\frac{m^2+1}{n'}\left(n'+P'\frac{mx'-y'}{x'}\right)\left(n'+Q'\frac{mx'-y'}{x'}\right)$$

$$=\frac{m^2+1}{n'}\left[n'^2+n'\frac{mx'-y'}{x'}(P'+Q')+\left(\frac{mx'-y'}{x'}\right)^2P'Q'\right].$$

d'où, en multipliant les membres extrêmes par x'^2 :

$$n'(x'^2+y'^2)+(x'^2+y'^2+k^2t^{-2})(mx'-y')$$
$$=(m^2+1)\left[n'x'^2+(mx'-y')x'(P'+Q')+(mx'-y')^2\frac{P'Q'}{n'}\right],$$

d'où :

$$k^2t^{-2}(mx'-y')$$
$$=-(x'^2+y'^2)(mx'-y'+n')+(m^2+1)\left[n'x'^2+(mx'-y')x'(P'+Q')+(mx'-y')^2\frac{P'Q'}{n'}\right],$$

d'où :

$$-k^2t^{-2}$$
$$=x'^2+y'^2+\frac{n'(x'^2+y'^2)}{mx'-y'}-(m^2+1)\frac{n'x'^2}{mx'-y'}-(m^2+1)x'(P'+Q')-(m^2+1)(mx'-y')\frac{P'Q'}{n'}.$$

Or, on a identiquement :

$$\frac{n'(x'^2+y'^2)}{mx'-y'}-(m^2+1)\frac{n'x'^2}{mx'-y'}=n'\frac{y'^2-m^2x'^2}{mx'-y'}=-n'(y'+mx');$$

il vient donc :

$$-k^2t^{-2}=x'^2+y'^2-n'(y'+mx')-x'(m^2+1)(P'+Q')-(m^2+1)(mx'-y')\frac{P'Q'}{n'}.$$

Tableau G.

(*Renvoi du n° 61.*)

Résolution du système d'équations :

$$\left\{\begin{aligned} &x^2+y^2=k^2t^{-2}\left(\frac{t}{\rho}-1\right), && (1)\\ &x^2+y^2+Ax+By=-k^2t^{-2}, && (2)\\ &x^2+y^2+px+qy=-k^2t^{-2}, && (3)\end{aligned}\right.$$

dans lequel x, y et t sont les trois inconnues.

Les équations (1) et (2) donnent par soustraction :

$$A\,x + B\,y = -\frac{k^2\,t^{-1}}{\rho}\,; \qquad (4)$$

les équations (1) et (3) donnent de même :

$$p\,x + q\,y = -\frac{k^2\,t^{-1}}{\rho}\,. \qquad (5)$$

Des équations (4) et (5) on tire :

$$x = \frac{k^2\,t^{-1}}{\rho}\,.\,\frac{B - q}{A\,q - B\,p}\,, \qquad (6)$$

et

$$y = \frac{k^2\,t^{-1}}{\rho}\,.\,\frac{p - A}{A\,q - B\,p}\,. \qquad (7)$$

Portant ces valeurs dans l'équation (1), on a :

$$\frac{k^4\,t^{-2}}{\rho^2} \times \frac{(B - q)^2 + (p - A)^2}{(A\,q - B\,p)^2} = k_2\,t^{-2}\left(\frac{t}{\rho} - 1\right),$$

ou

$$\frac{t}{\rho} - 1 = \frac{k^2}{\rho^2}\,.\,\frac{(B - q)^2 + (p - A)^2}{(A\,q - B\,p)^2}\,,$$

d'où :

$$t = \frac{k^2\left[(B - q)^2 + (p - A)^2\right] + \rho^2\,(A\,q - B\,p)^2}{\rho\,(A\,q - B\,p)^2}\,.$$

Reportant la valeur de t dans les équations (6) et (7), on a pour x et y les valeurs suivantes :

$$x = \frac{k^2\,(B - q)\,(A\,q - B\,p)}{k^2\left[(B - q)^2 + (p - A)^2\right] + \rho^2\,(A\,q - B\,p)^2}\,,$$

$$y = \frac{k^2\,(p - A)\,(A\,q - B\,p)}{k^2\left[(B - q)^2 + (p - A)^2\right] + \rho^2\,(A\,q - B\,p)^2}\,.$$

Tableau H.

(*Renvoi du n° 62.*)

Forme que prend le second membre de l'égalité :

$$\frac{d\,l^2}{d\,p^2} = \left(\frac{d\,x^2}{d\,p^2} + \frac{d\,y^2}{d\,p^2}\right) t^2 + k^2 \frac{d\,t^2}{t^2\,d\,p^2},$$

lorsqu'on y remplace t, $\frac{d\,x}{d\,p}$, $\frac{d\,y}{d\,p}$, $\frac{d\,t}{t\,d\,p}$ par les valeurs suivantes :

$$t = \frac{D}{p^2\,\rho\,(A\,\lambda - B)^2},$$

$$\frac{d\,x}{d\,p} = k^2\,(A\,\lambda - B)\,\frac{D\,(B - 2\,\lambda\,p) - D'\,(B - \lambda\,p)\,p}{D^2},$$

$$\frac{d\,y}{d\,p} = -\,k^2\,(A\,\lambda - B)\,\frac{D\,(A - 2\,p) - D'\,(A - p)\,p}{D^2},$$

$$\frac{d\,t}{t\,d\,p} = \frac{D'\,p - 2\,D}{p\,D},$$

dans lesquelles D représente l'expression :

$$k^2\,[\,(A - p)^2 + (B - \lambda\,p)^2\,] + \rho^2\,(A\,\lambda - B)^2\,p^2,$$

et D′ l'expression :

$$-\,2\,k^2\,[A - p + \lambda\,(B - \lambda\,p)] + 2\,\rho^2\,p\,(A\,\lambda - B)^2.$$

Je fais d'abord la substitution en conservant les lettres D et D′ ; il vient :

$$\frac{d\,l^2}{d\,p^2} = k^2\,\frac{k^2\left\{[D\,(B - 2\,\lambda\,p) - D'\,(B - \lambda\,p)\,p]^2 + [D\,(A - 2\,p) - D'\,(A - p)\,p]^2\right\} + p^2\,\rho^2\,(A\,\lambda - B)^2\,(D'\,p - 2\,D)^2}{D^2\,p^4\,\rho^2\,(A\,\lambda - B)^2}$$

Il reste à remplacer dans le second membre les lettres D et D′ par les expressions qu'elles représentent.

Avant d'effectuer cette substitution, je développe dans l'expression de $\frac{d\,l^2}{d\,p^2}$, le numérateur de la fraction suivant les puissances

de la lettre D. Soient, dans ce développement, S_0 le polynome indépendant de la lettre D, S_1 le coefficient de la première puissance, et S_2 le coefficient de la seconde puissance de cette même lettre.

On aura $\frac{d\,l^2}{d\,p^2} = k^2 \; \frac{S_0 + S_1 D + S_2 D^2}{D^2 p^4 \rho^2 (A\lambda - B)^2}$.

Le développement donne pour S_0 la valeur suivante :

$$S_0 = k^2 D'^2 (B - \lambda p)^2 p^2 + k^2 D'^2 (A - p)^2 p^2 + p^4 \rho^2 (A\lambda - B)^2 D'^2,$$

ou

$$S_0 = D'^2 p^2 [k^2 (B - \lambda p)^2 + k^2 (A - p)^2 + p^2 \rho^2 (A\lambda - B)^2].$$

Dans le second membre de cette dernière égalité, la quantité entre crochets n'est autre que l'expression de D. On a donc :

$$S_0 = D'^2 p^2 D;$$

d'où :

$$\frac{d\,l^2}{d\,p^2} = k^2 \; \frac{D'^2 p^2 + S_1 + S_2 D}{D p^4 \rho^2 (A\lambda - B)^2}.$$

On a, en continuant le développement :

$$S_1 = -2 k^2 D' [(B - \lambda p)(B - 2\lambda p) p + (A - 2p)(A - p) p] - 4 p^3 \rho^2 D' (A\lambda - B)^2,$$

ou

$$S_1 = -2 D' p [k^2 (B - \lambda p)(B - 2\lambda p) + k^2 (A - 2p)(A - p) + 2 p^2 \rho^2 (A\lambda - B)^2];$$

d'où :

$$D'^2 p^2 + S_1 = -D' p [2 k^2 (B - \lambda p)(B - 2\lambda p) + 2 k^2 (A - 2p)(A - p) + 4 p^2 \rho^2 (A\lambda - B)^2 - D' p].$$

Dans cette dernière égalité, l'expression entre crochets devient quand on y remplace D' par sa valeur :

$$2 k^2 (B - \lambda p)(B - 2\lambda p) + 2 k^2 (A - 2p)(A - p) + 2 p^2 \rho^2 (A\lambda - B)^2 + 2 k^2 p [A - p + \lambda (B - p)],$$

ou

$$2 k^2 (B - \lambda p)^2 + 2 k^2 (A - p)^2 + 2 p^2 \rho^2 (A\lambda - B)^2,$$

expression égale à 2 D.

On a donc :

$$D'^2 p^2 + S_1 = -2 D D' p,$$

et par suite :

$$\frac{d\,l^2}{d\,p^2} = k^2 \; \frac{-2 D D' p + S_2 D}{D p^4 \rho^2 (A\lambda - B)^2} = k^2 \; \frac{-2 D' p + S_2}{p^4 \rho^2 (A\lambda - B)^2}.$$

La suite du développement donne :

$$S_2 = k^2 (B - 2\lambda p)^2 + k^2 (A - 2p)^2 + 4 p^2 \rho^2 (A\lambda - B)^2 .$$

Je remplace D' et S_2 par leurs valeurs dans l'expression $-2 D' p + S_2$; il vient :

$$-2 D' p + S_2 = 4 k^2 [A - p + \lambda (B - \lambda p)] p + k^2 [(B - 2\lambda p)^2 + (A - 2p)^2] ,$$

expression qui se réduit à $k^2 (A^2 + B^2)$.

On a donc enfin :

$$\frac{d\,l}{d\,p^2} = \frac{k^4 (A^2 + B^2)}{p^4 \rho^2 (A\lambda - B)^2} .$$

Tableau I.

(*Renvoi du n° 67.*)

Résolution du système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_1^2 + Y_1^2 = k^2 T_1^{-2} \left(\frac{T_1}{\rho} - 1 \right) & (1) \\ Y_1 = m X_1 & (2) \\ (m^2 + 1) X_1 (X_1 - P) = - k^2 T_1^{-2} , & (3) \end{array} \right.$$

dans lequel X_1, Y_1, T_1 sont les trois inconnues.

On tire des équations (1) et (2) :

$$T_1^2 X_1^2 (m^2 + 1) + k^2 = k^2 \frac{T_1}{\rho} ; \qquad (4)$$

de l'équation (3) :

$$T_1^2 X_1^2 (m^2 + 1) + k^2 = T_1^2 P X_1 (m^2 + 1) ; \qquad (5)$$

des équations (4) et (5) :

$$T_1 P X_1 (m^2 + 1) = \frac{k^2}{\rho},$$

ou

$$T_1 = \frac{k_2}{\rho P X_1 (m^2 + 1)} . \qquad (6)$$

Remplaçant dans l'équation (3) T_1 par sa valeur, telle que l'équation (6) la fournit, on a :

$$(m^2+1)\,X_1\,(X_1-P) = -\frac{\rho^2 P^2 X_1^2 (m^2+1)^2}{k^2},$$

ou

$$k^2 (X_1 - P) = -\rho^2 P^2 X_1 (m^2+1),$$

d'où :

$$X_1 = \frac{k^2 P}{k^2 + \rho^2 P^2 (m^2+1)}.$$

Portant cette valeur dans les équations (2) et (6), on a :

$$Y_1 = \frac{m\,k^2 P}{k^2 + \rho^2 P^2 (m^2+1)},$$

et

$$T_1 = \frac{k^2 + \rho^2 P^2 (m^2+1)}{\rho P^2 (m^2+1)}.$$

Tableau J.

(*Renvoi du n° 69.*)

Vérifier sur les formules :

$$t' = \frac{\rho}{k^2} \cdot \frac{k^2 + t^2 (x^2+y^2)}{t}, \qquad (1)$$

$$t'\,dx' = \frac{(fx-y)\,(t'\,dt - t\,dt') + t\,t'\,(f\,dx - dy)}{t'\sqrt{f^2+1}}, \qquad (2)$$

$$t'\,dy' = \frac{(x+fy)\,(t'\,dt - t\,dt') + t\,t'\,(dx + f\,dy)}{t'\sqrt{f^2+1}}, \qquad (3)$$

la relation :

$$t'^2 (dx'^2 + dy'^2) + k^2 \frac{dt'^2}{t'^2} = t^2 (dx^2 + dy^2) + k^2 \frac{dt^2}{t^2}.$$

Des équations (2) et (3) on tire :

$$\left.\begin{aligned}&(dx'^2+dy'^2)\,t'^2\\ &=\frac{\left[(fx-y)(t'd\ \ -t\,dt')+tt'(f\,dx-dy)\right]^2+\left[(x+fy)(t'dt-t\,dt')+tt'(dx+f\,dy)\right]^2}{t'^2(f^2+1)}.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Dans le second membre de cette égalité, le numérateur est égal à la somme des termes suivants :

$$(t'\,dt-t\,dt')^2\left[(fx-y)^2+(x+fy)^2\right]$$

$$+2\,t\,t'(t'\,dt-t\,dt')\left[(fx-y)(f\,dx-dy)+(x+fy)(dx+f\,dy)\right]$$

$$+t^2t'^2\left[(f\,dx-dy)^2+(dx+f\,dy)^2\right].$$

Or, on a identiquement :

$$(fx-y)^2+(x+fy)^2=(f^2+1)(x^2+y^2),$$

$$(fx-y)(f\,dx-dy)+(x+fy)(dx+f\,dy)=(f^2+1)(x\,dx+y\,dy),$$

$$(f\,dx-dy)^2+(dx+f\,dy)^2=(f^2+1)(dx^2+dy^2);$$

l'égalité (4) peut donc s'écrire :

$$\frac{(dx'^2+dy'^2)\,t'^2}{=\frac{(t'\,dt-t\,dt')^2(x^2+y^2)+2\,t\,t'(t'\,dt-t\,dt')(x\,dx+y\,dy)+t^2t'^2(dx^2+dy^2)}{t'^2}}$$

d'où :

$$(dx'^2+dy'^2)\,t'^2+k^2\frac{dt'^2}{t'^2}$$

$$=\left(dt-t\frac{dt'}{t'}\right)^2(x^2+y^2)+2\,t\left(dt-t\frac{dt'}{t'}\right)(x\,dx+y\,dy)+t^2(dx^2+dy^2)+k^2\frac{dt'^2}{t'^2}.$$

Désignant le premier membre par ds'^2, et ordonnant le second membre suivant les puissances décroissantes de $\frac{dt'}{t'}$, on a :

$$ds'^2=\frac{dt'^2}{t'^2}\left[t^2(x^2+y^2)+k^2\right]-\frac{dt'}{t'}\left[2\,t\,dt\,(x^2+y^2)+2\,t^2(x\,dx+y\,dy)\right]$$

$$+dt^2(x^2+y^2)+t^2(dx^2+dy^2)+2\,t\,dt\,(x\,dx+y\,dy).$$

Si je pose :

$$N=t^2(x^2+y^2)+k^2,$$

d'où je tire :

$$dN = 2\,t\,dt\,(x^2 + y^2) + 2\,t^2\,(x\,dx + y\,dy),$$

il vient :

$$ds'^2 = \frac{dt'^2}{t'^2}\,N - \frac{dt'}{t'}\,dN + dt^2\,(x^2 + y^2) + t^2\,(dx^2 + dy^2) + 2\,t\,dt\,(x\,dx + y\,dy). \quad (5)$$

D'ailleurs, la formule (1) peut s'écrire :

$$t' = \frac{\rho}{k^2} \cdot \frac{N}{t};$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dt'}{t'} = \frac{t\,dN - N\,dt}{t\,N}.$$

Portant cette valeur dans le second membre de l'égalité (5), l'ensemble des deux premiers termes devient :

$$\frac{(t\,dN - N\,dt)^2}{t^2\,N} - \frac{(t\,dN - N\,dt)\,dN}{t\,N},$$

ou :

$$-\frac{t\,dN - N\,dt}{t^2}\,dt,$$

ou :

$$-\frac{dN}{t}\,dt + N\,\frac{dt^2}{t^2},$$

ou, en remplaçant N et d N par leurs valeurs :

$$-2\,dt^2\,(x^2 + y^2) - 2\,t\,dt\,(x\,dx + y\,dy) + dt^2\,(x^2 + y^2) + k^2\,\frac{dt^2}{t^2}$$

ou enfin :

$$-dt^2\,(x^2 + y^2) - 2\,t\,dt\,(x\,dx + y\,dy) + k^2\,\frac{dt^2}{t^2}.$$

Remplaçant dans l'équation (5) les deux premiers termes du second membre par cette valeur, et le premier membre par l'expression $(dx'^2 + dy'^2)\,t'^2 + k^2\,\frac{dt'^2}{t'^2}$, à laquelle ds'^2 a été substitué, on a finalement :

$$(dx'^2 + dy'^2)\,t'^2 + k^2\,\frac{dt'^2}{t'^2} = (dx^2 + dy^2)\,t^2 + k^2\,\frac{dt^2}{t^2}.$$

FIN.

ERRATA.

Nota. J'ai signalé ici les fautes les plus essentielles à corriger dans les formules, et quelques modifications à apporter au texte même. Mais je ne me suis pas attaché à relever, dans le tableau des *errata*, toutes les incorrections qui, se rectifiant naturellement à la lecture, ne sont pas de nature à induire en erreur ; telles sont, par exemple, les suivantes :

P. 57, av. dern. ligne, omission du facteur différentiel dp dans l'expression à intégrer ;

P. 59, av. dern. ligne, $x^2 + y$ pour $x^2 + y^2$;

P. 72, dans le titre en italiques, insertion fautive des mots : *de la surface et du volume de la sphère*, qui se rapportent à une autre division du chapitre, etc.

Pages.	Lignes ou formules.	*AU LIEU DE :*	*LISEZ :*
16	l. 24	l'angle R I K.	l'angle O I K
28	l. 15	$\frac{dz}{dx} = \frac{k(2x - P - Q)}{2(x - P)(x - Q)}$	$\frac{dz}{dx} = -\frac{k(2x - P - Q)}{2(x - P)(x - Q)}$.
31	f. (i)	$e^{\frac{z}{k}}(x - \alpha) - e^{\frac{Z}{k}}(X - \alpha)$	$t(x - \alpha_1) - T(X - \alpha_1)$
33	l. 25 à 30	C'est après ce déplacement que j'ai à appliquer le premier des trois principes énoncés plus haut, pour en tirer quelque relation entre les éléments de la partie qui est restée fixe et ceux de la partie que j'ai déplacée ; mais si, faisant abstraction de la figure, je veux raisonner sur les formules, je reconnais que ces éléments,	Le déplacement ne peut avoir d'autre objet que de faciliter la comparaison entre les éléments de la figure déplacée et ceux de la figure restée fixe. Ce déplacement ayant été effectué conformément au premier des trois principes énoncés plus haut, c'est-à-dire sans qu'aucun des éléments de la figure déplacée n'ait été altéré, les résultats de la comparaison sont applicables à la même figure dans sa première position ; telle est la seule conséquence à tirer du premier principe. Mais si, faisant abstraction de toute figure, je veux raisonner sur les formules, je reconnais que les mêmes éléments,

Pages.	Lignes ou formules.	*AU LIEU DE :*	*LISEZ :*
49	l 7	$e^{\frac{2D}{k}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$e^{\pm\frac{2D}{k}} =$
51	l. e	à la valeur α de x.	aux valeurs α et β de x et de y,
52	l. 19	être mises (n° 57) sous la forme	être mises sous la forme :
id.	l. 22	seront de la forme.	seront (n° 57) de la forme :
id.	f. (3)	$(\lambda^2+1)(n'+H\lambda+Hm)n' = \ldots$	$(\lambda^2+1)(n'-H\lambda+Hm)n' =$
56	l. 22	par p_1 et p_2	par p_0 et p_1
59	l. p^re	$X^2+Y^2+pX+\lambda Y = -K^2T^{-2}$	$X^2+Y^2+pX+\lambda pY = -k^2T^{-2}$
63	f. (z'')	$-\frac{t^2(fx+y)}{k^2+t^2(x^2+y^2)}\Big] \ldots\ldots$	$-\frac{t^2(fx-y)}{k^2+t^2(x^2+y^2)}\Big]$
65	f. (2)	$\frac{t(x+fy)}{k^2+t^2(x^2+y^2)}, \ldots\ldots\ldots$	$\frac{t^2(x+fy)}{k^2+t^2(x^2+y^2)},$
75	l. 7	Ch. comp. n° XIII)	Ch. compl. n° XII)
85	l. p^re	A V et A' V' ;	A V et A V' ;
94	l. 5	$\frac{(m+m')[(\alpha-\alpha')^2-(\beta-\beta')^2]+\ldots}{RR'(m-m')^2(m+m')}$	$-\frac{(m+m')[(\alpha-\alpha')^2-(\beta-\beta')^2]+\ldots}{RR'(m-m')^2(m+m')}$
95	l. 22 à 24	Soit ϕ l'angle que ce plan fait avec la normale à l'arc de comparaison en un point P (fig. 42, pl. VI) dont les coordonnées sont x, y, z.	Soit ϕ l'angle que ce plan fait en un point P (fig. 42, pl. VI) avec la normale à la surface de comparaison.
96	l. 7	On a, en général (n° 48), ...	on a, en général (n° 49),
id.	l. 15	on en tire (n° 85)	on en tire (n° 85), la valeur de t se rapportant au point P :
98	f. (2)	$+\frac{2k^2}{t}\frac{dt}{dx}(X-x) \ldots\ldots$	$+\frac{2k^2}{t^3}\frac{dt}{dx}(X-x)$
105	l. 28	Je terminerai en analysant, une démonstration.	Je terminerai en analysant une démonstration
107	l. 15	deux points à égale distance du point A.	deux points O et O' à égale distance du point A.
111	l. 24	P_1, P_2, P_3	P'_1, P'_2, P'_3....
id.	l. 31	au périmètre P', ...	au périmètre P'_v,
123	l. 4	les longueurs ap et bn.	les longueurs ap et cm
130	l. 7	R, r_1, r_2, ... r_p, R'.	R', r_1, r_2 .... r_p, R''.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

Introduction . . . . . .

CHAPITRE PREMIER.

De quelques propriétés des figures infinitésimales 1

CHAPITRE II.

Choix d'un système de coordonnées dans un plan. — Forme que prend l'équation de la ligne droite dans ce système, et indépendamment de la théorie des parallèles. — Expression analytique de la distance de deux points. — Formules de transformation de coordonnées. — Première conclusion relative aux résultats que peut fournir une forme quelconque de raisonnement appliquée à une figure plane et s'appuyant uniquement sur les propriétés dont les éléments de la figure jouissent dans le plan . 12

CHAPITRE III.

De la surface de rayon infini. — Détermination au moyen de deux coordonnées de la position d'un point situé sur une surface donnée de rayon infini. — Détermination de la position d'un point quelconque dans l'espace au moyen de trois coordonnés. — Equations générales de la ligne droite. — Expression analytique de la distance de deux points. — Equations générales de la sphère, de la surface de rayon infini et du plan. — Formules de transformation de coordonnées. — Conclusion 38

CHAPITRE IV.

Des lignes trigonométriques ; relations trigonométriques dans les figures infinitésimales ; trigonométrie sphérique. — Mesures de la circonférence, du cercle, du secteur de cercle, du triangle dans la géométrie imaginaire. — Trigonométrie imaginaire. — Mesures de la surface et du volume de la sphère. — Formules diverses de géométrie analytique imaginaire à deux et à trois dimensions. — Des applications que la géométrie imaginaire est susceptible de recevoir. — Remarque au sujet de l'évidence du postulatum d'Euclide 70

CHAPITRE COMPLÉMENTAIRE.

Des axiomes particuliers à la géométrie. — Existence de surfaces planes. — La somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne peut excéder deux angles droits. — Mesure de l'angle dièdre. — Définition géométrique de la longueur d'un arc de courbe. — De la tangente. — Aire d'une surface plane. — Aire d'une surface courbe. — Volume d'un solide. — Démonstration récemment proposée par M. Carton pour affranchir la théorie des parallèles du postulatum d'Euclide ; postulatum sous-entendu dans cette démonstration 103

DÉVELOPPEMENT DES CALCULS INDIQUÉS AUX CHAPITRES II ET III 135

ERRATA 153

Strasbourg, imprimerie Christophe.

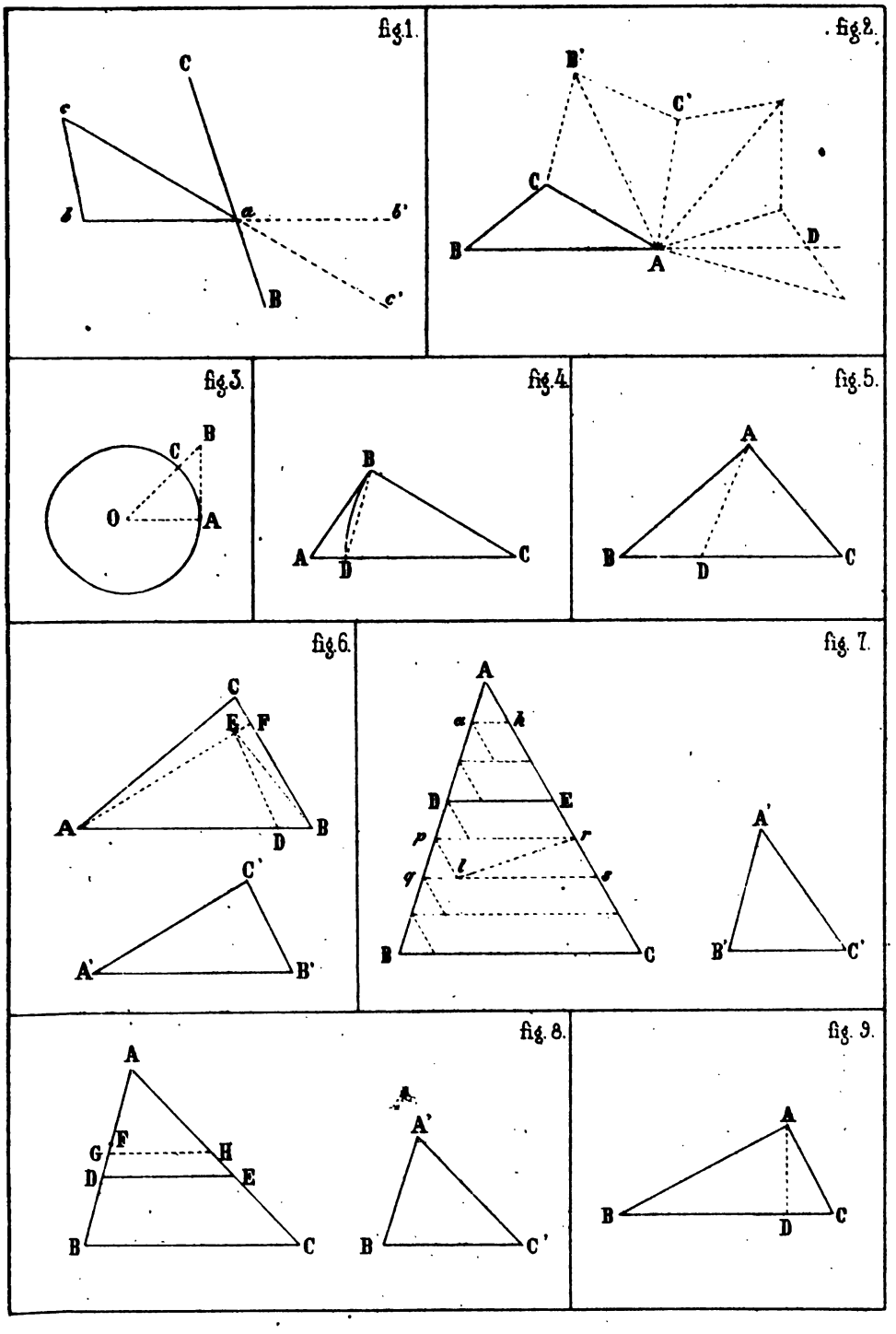


fig. 1.
C
c
b
a
b'
B
c'
fig. 2.
B'
C'
C
B
A
D
fig. 3.
B
C
O
A
fig. 4.
B
A
D
C
fig. 5.
A
B
D
C
fig. 6.
C
E
F
A
D
B
C'
A'
B'
fig. 7.
A
a
h
D
E
p
r
q
l
s
B
C
A'
B'
C'
fig. 8.
A
G
F
H
D
E
B
C
A'
B
C'
fig. 9.
A
B
D
C

fig. 10.

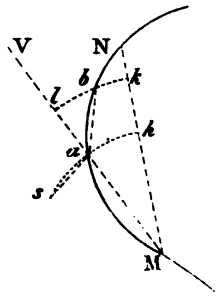


fig. 11

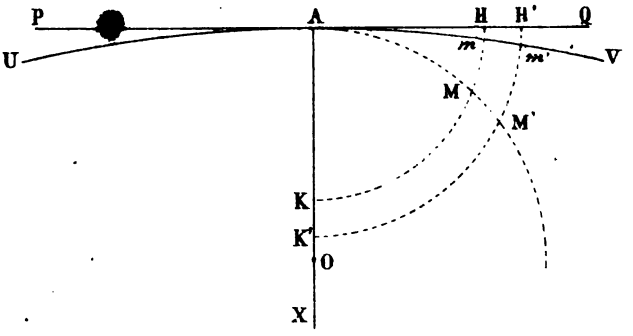


fig. 12.

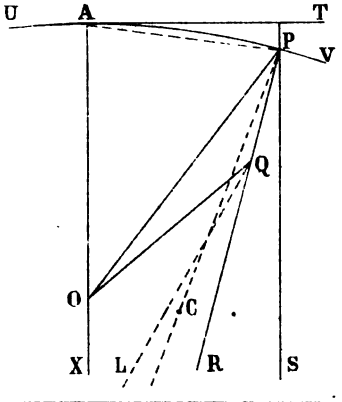


fig. 13

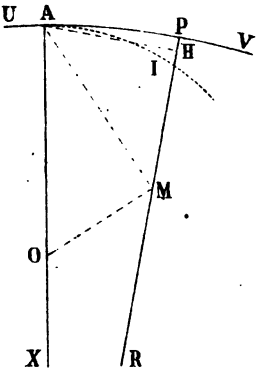


fig. 14.

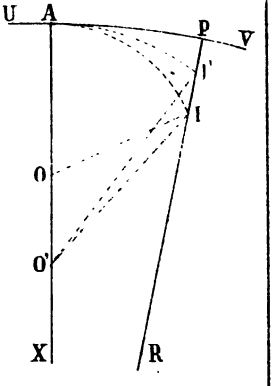


fig. 15.

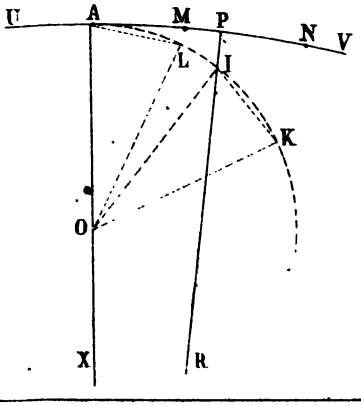


fig. 16.

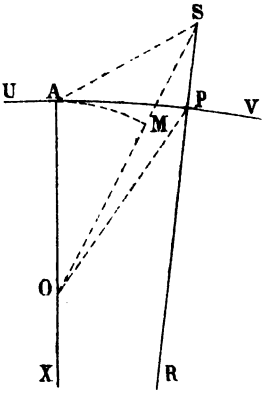
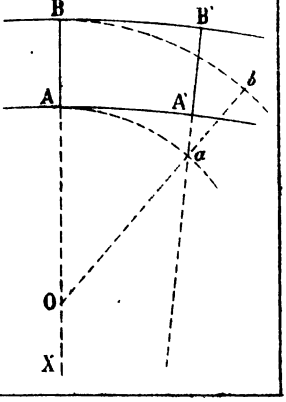


fig. 17.



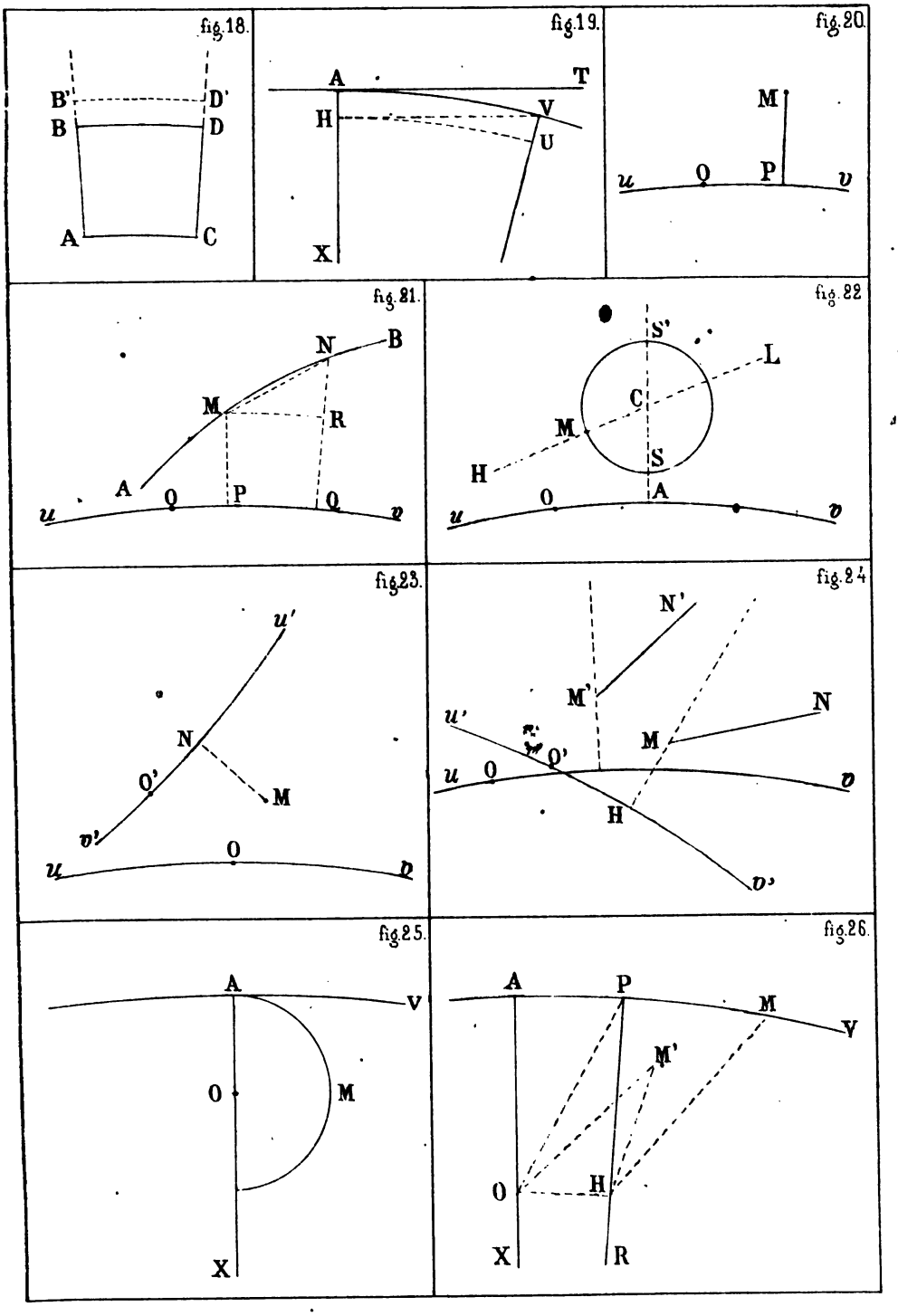


fig. 18.
B'
D'
B
D
A
C
fig. 19.
A
T
H
V
U
X
fig. 20.
M
u
O
P
v
fig. 21.
N
B
M
R
A
O
P
Q
u
v
fig. 22
S'
L
C
M
H
S
O
A
u
v
fig. 23.
u'
N
O'
M
v'
O
u
v
fig. 24
N'
M'
N
u'
M
O'
u
O
v
H
v'
fig. 25.
A
V
O
M
X
fig. 26.
A
P
M
V
M'
O
H
X
R

Pl. IV.

fig. 27.

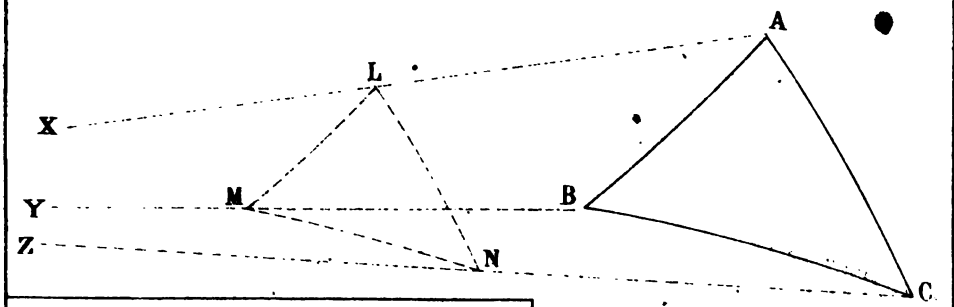


fig. 28.

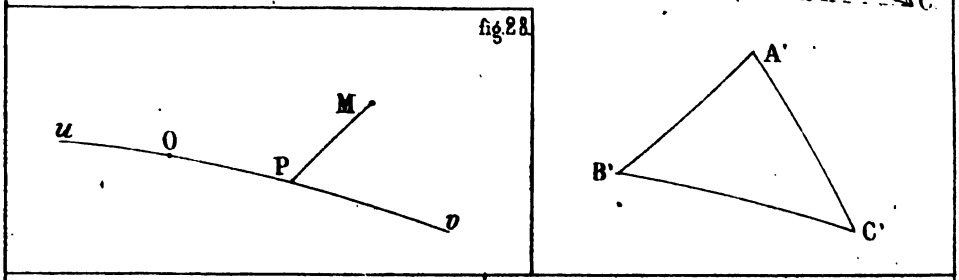


fig. 29.

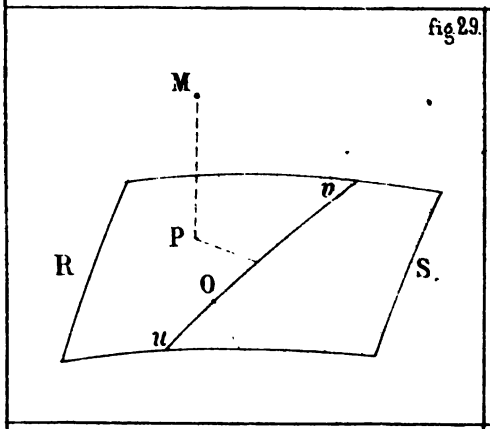


fig. 30.

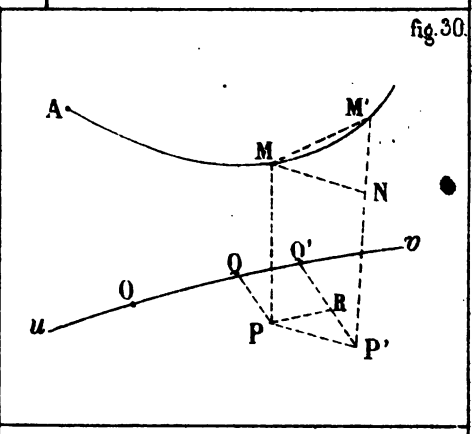


fig. 31.

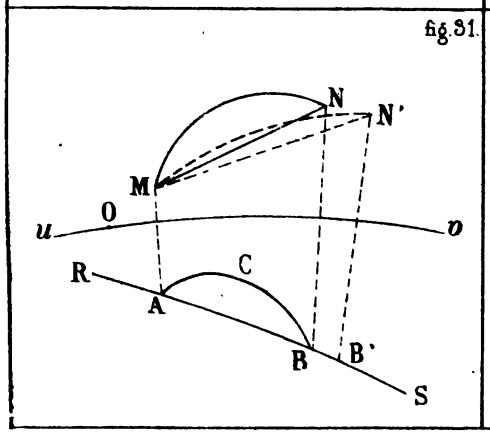


fig. 32.

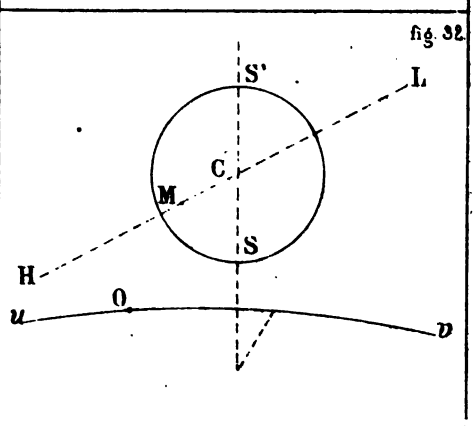


fig. 33.

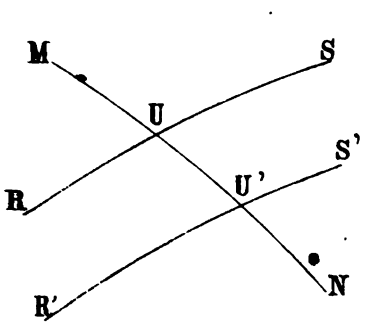


fig. 34.

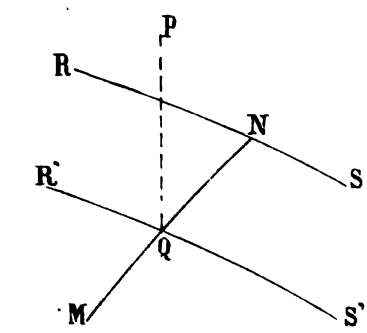


fig. 35.

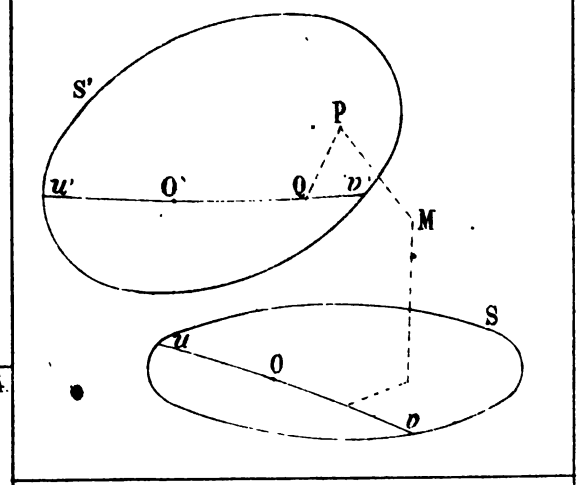


fig. 36.

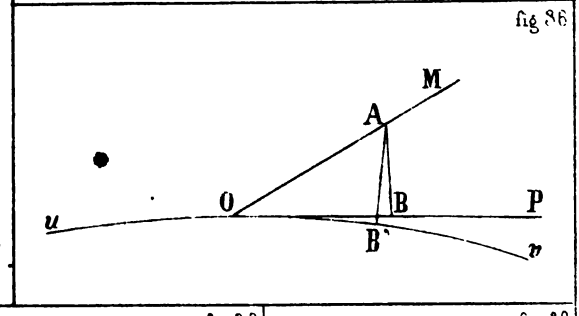


fig. 37.

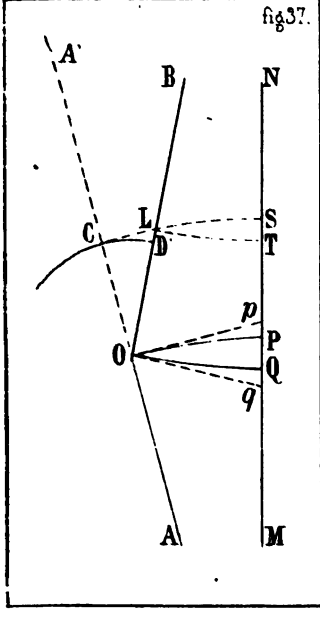


fig. 38.

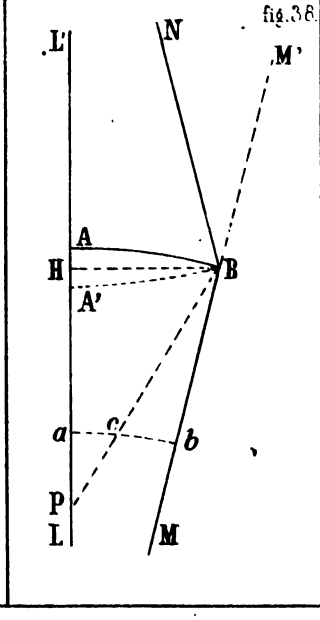


fig. 39.

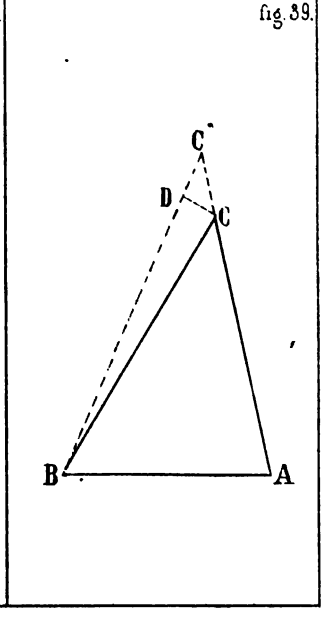


fig. 40.

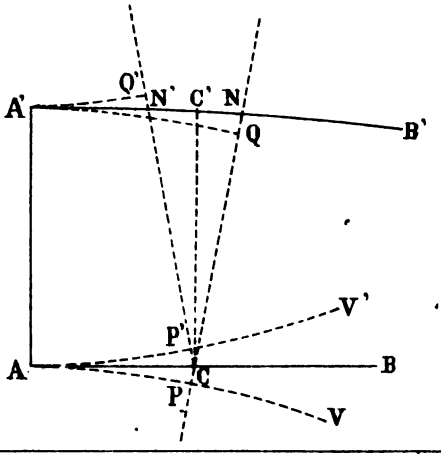


fig. 41

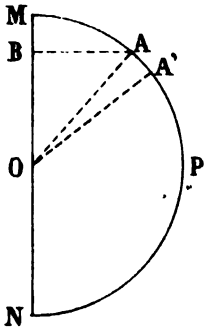


fig 42.

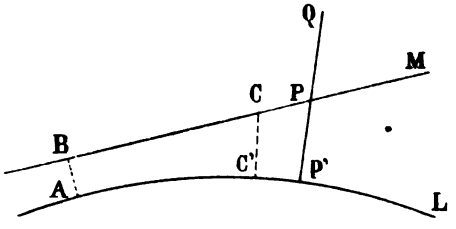


fig 43

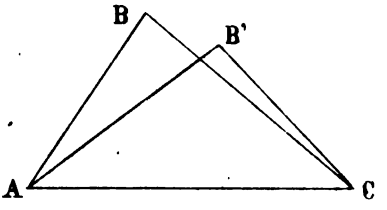


fig. 44.

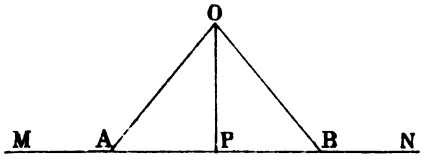


fig. 45.

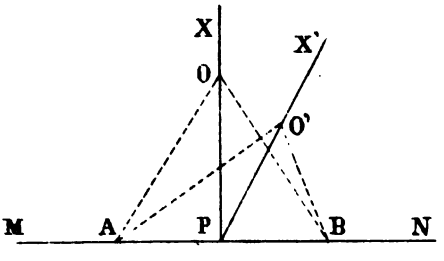


fig. 46.

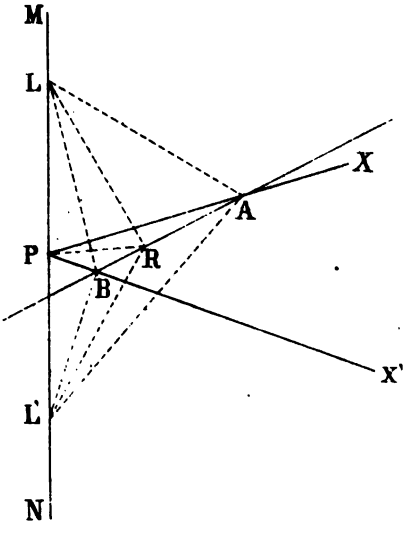


fig. 47.

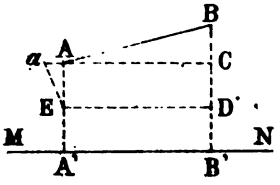


fig. 48.

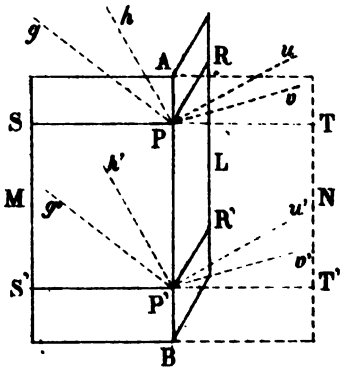


fig. 49

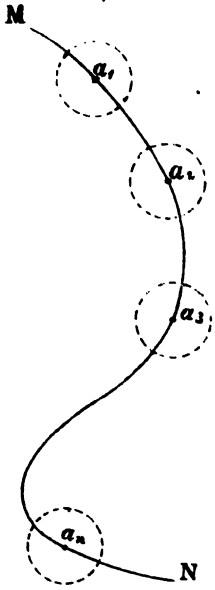


fig. 50.

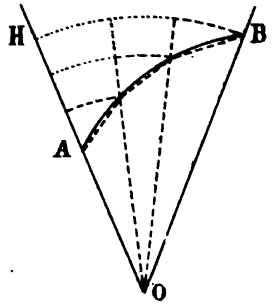


fig. 51.

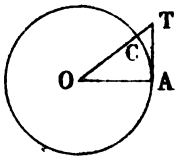


fig. 52.

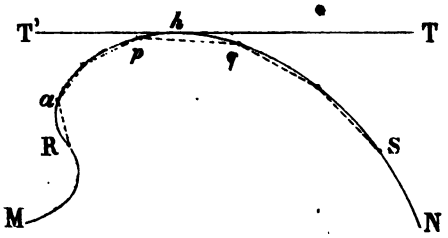


fig. 53.

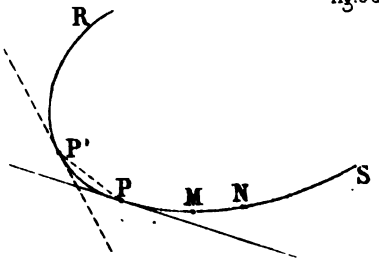


fig. 54.

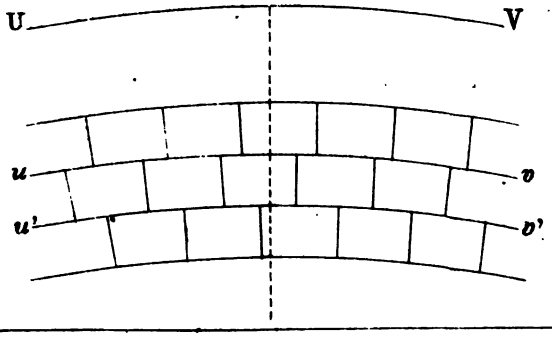


fig. 55.

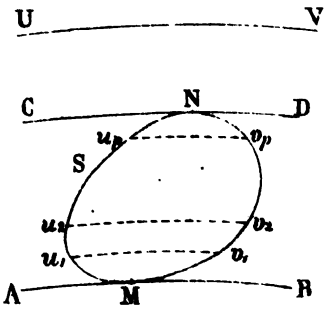


fig. 56.

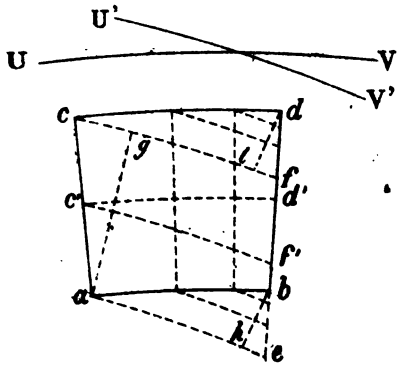


fig. 57.

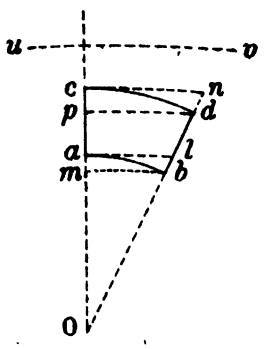


fig. 58.

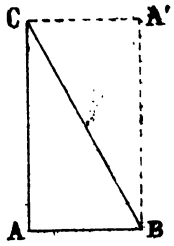


fig. 59.

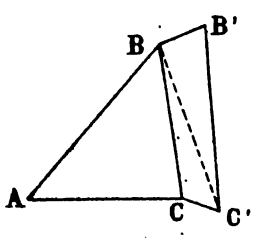


fig. 60.

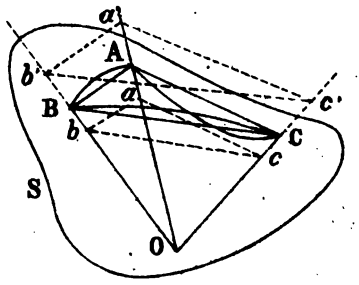


fig. 61.

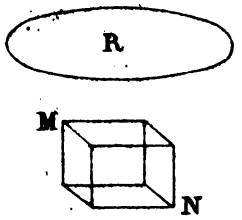


fig. 62.

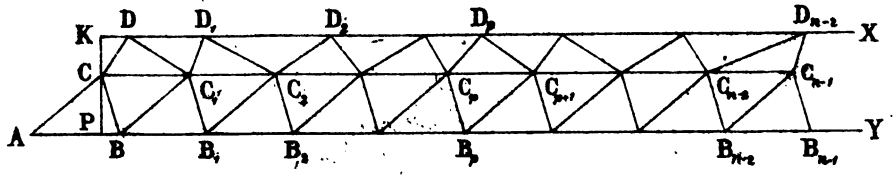
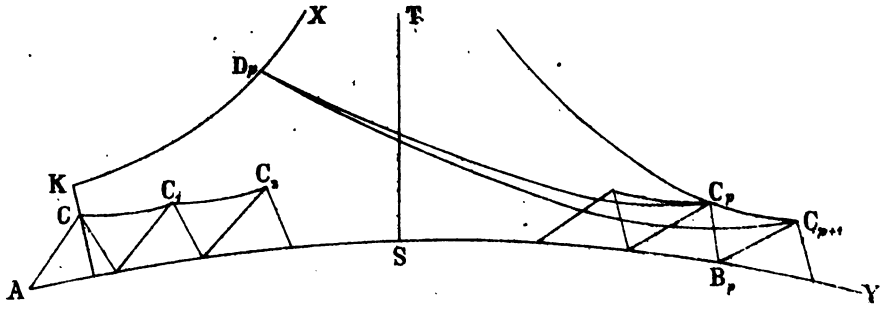


fig. 63.



Math 5038.71
Etudes analytiques sur la theorie
Cabot Science 003329835
3 2044 091 901 686